

## Aufgabe 4: Analysis &amp; Lineare Algebra – Themenmix



Das Unternehmen MÄH-ROB GmbH produziert u.a. verschiedene Typen von Mährobotern.

Bisher war die MÄH-ROB GmbH nur im Bereich Norddeutschland als Anbieter auf dem Markt und möchte ihr Geschäftsfeld auf den Vorderpfälzer Bereich erweitern. Natürlich befindet man sich in

Konkurrenz zu anderen Unternehmen und hat auf der Basis von Marktuntersuchungen folgendes Wechselverhalten im Turnus von drei Jahren ermitteln lassen:

- Vom Konkurrent **(A)dli** wechseln 20 % der Kunden zu Konkurrent **(B)ock**; 30 % bleiben bei einem Neukauf bei **(A)dli** – der Rest würde wohl sein Glück bei **(M)ÄH-ROB** probieren
- Bei Konkurrent **(B)ock** verbleiben 10 % der Kunden, 30 % wechseln zu **(A)dli** – alle weiteren würden dem neuen Anbieter **(M)ÄH-ROB** das Vertrauen schenken.
- **(M)ÄH-ROB** selbst möchte mit entsprechenden Marketingmaßnahmen 90 % seiner Kundschaft binden; der Rest wechselt zu gleichen Teilen zu den beiden Konkurrenten.

4.1 Vervollständigen Sie aufgrund des beschriebenen Verhaltens die **Übergangsmatrix**

[8]

$$U = \begin{pmatrix} \downarrow & A & B & M \\ A & \square & \square & \square \\ B & \square & \square & \square \\ M & \square & \square & \square \end{pmatrix}$$

und zeigen Sie, dass die **Inverse zur Übergangsmatrix** folgende Form annehmen kann:

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} -2,4 & 9,6 & -0,4 \\ 6,2 & -9,8 & 0,2 \\ -2,8 & 1,2 & 1,2 \end{pmatrix}$$

4.2 Die aktuellen Marktanteile belaufen sich auf:

(A)dli:  $2\mathbf{a}$

(B)ock:  $3\mathbf{a}$

(M)ÄH-ROB:  $\mathbf{0}$

[5]

Bestimmen Sie daraus den Verteilungsvektor  $\overline{p_0}$  und den Wert für  $\mathbf{a}$  bei insgesamt **2.000** Kunden.

4.3 Mit welchen Marktanteilen ist in 3 ( $\hat{=}$   $\overline{p_1}$ ) bzw. 6 ( $\hat{=}$   $\overline{p_2}$ ) Jahren bei dem angenommenen Wechselverhalten zu rechnen?

[6]

## Aufgabe 4: Analysis &amp; Lineare Algebra – Themenmix

- 4.4 Ermitteln Sie den Vektor  $\vec{p}_{-1}$  und kommentieren Sie das Ergebnis kritisch. [5]
- 4.5 Langfristig wünscht sich (M)ÄH-ROB als potentieller Marktführer mind. 80 % Marktanteil.  
Untersuchen Sie, ob dies aufgrund der Ausgangssituation realisierbar ist. [8]
- 4.6 Erläutern Sie, wie sich die Übergangsmatrix in der Spalte „(M)ÄH-ROB“ verändert, wenn man von Seiten (M)ÄH-ROB eine langfristige Marktverteilung von 15 % bei (A)dli und 10 % bei (B)ock akzeptieren würde und das Wechselverhalten der Konkurrenz unverändert bliebe? [8]
- 4.7 Die Platzwerke stellen bei ihren Kunden aufgrund der vielen Käufe von Mährobotern einen erhöhten Energiebedarf fest.  
Dies führt zu Diskussionen über die drei Sektoren und den internen Verbrauch von (G)as, (W)asser und (S)trom und eine adäquate Abgabemöglichkeit an den Markt, um die Kunden nicht zu verlieren.  
Die Verflechtung der drei Sektoren untereinander und mit dem Markt wird durch das Leontief-Modell mit folgender Input-Output-Tabelle und der Technologiematrix T beschrieben: [8]

$$\left( \begin{array}{c|ccc|c|c} \vec{r} & G & W & S & Markt & Gesamtmenge \\ \hline G & 350 & a & 210 & y_1 & 1.000 \\ W & b & 216 & c & y_2 & 720 \\ S & 200 & 108 & d & y_3 & 700 \end{array} \right) \quad \text{und} \quad T = \begin{pmatrix} e & 0,15 & f \\ 0,25 & 0,3 & 0 \\ g & h & 0,25 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Werte der Koeffizienten a bis h und die **Marktabgabe**  $\vec{y}$  der Sektoren G, W und S.

**Aufgrund angepasster Produktionsentscheidungen gehen wir nun von folgender Leontief-Inversen aus:**

$$(E - T)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 15 & 10 \\ 0 & 15 & 10 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

- 4.8 Geben Sie die Anzahl der Mengeneinheiten von jedem der drei Sektoren an, die an den Markt abgegeben werden, wenn eine Gesamtproduktion von  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10.000 \\ 8.000 \\ 3.500 \end{pmatrix}$  existiert? [8]

**Aufgabe 4: Analysis & Lineare Algebra – Themenmix**

- 4.9 Aufgrund der Ergebnisse in Auftrag gegebener Marktprognosen entwickelt sich der Versorgungsbedarf für (G)as, (W)asser und (S)trom in den kommenden Monaten unterschiedlich, so dass auf der Basis folgender Gesamtproduktion kalkuliert wird.

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} -k^2 + 8.000 \\ 8.000 \cdot e^{-k} \\ 1.500 + 5k \end{pmatrix} \quad \text{mit } k = [0; 12]$$

Dabei soll  $k$  für einen Zeitpunkt innerhalb des Betrachtungszeitraums stehen.

- 4.9.1 Beschreiben Sie die Entwicklung der Gesamtproduktion für (G)as, (W)asser und (S)trom in den kommenden 12 Monaten.

**[6]**

- 4.9.2 Zeigen Sie, dass die möglichen Abgaben an den Markt folgende Darstellung annehmen kann:

**[8]**

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} -1.600e^{-k} - 0,2k^2 + 1.600 \\ 1.600e^{-k} - 600 - 2k \\ -1.600e^{-k} + 900 + 3k \end{pmatrix}$$

und ermitteln Sie den Zeitpunkt, in dem das **Maximum der Summe der Marktabgaben** erreicht wird.

- 4.9.3 Begründen Sie, dass Ihr Wert ein Maximum darstellt – denken Sie dabei nicht nur an die Differentialrechnung 😊 - und beurteilen Sie, ob es sich dabei um ein globales Maximum handelt.

**[7]**

- 4.9.4 In welchem Monat - ausgehend von heute (Mai 2023) – wird die maximale Marktabgabe realisiert?

**[3]**