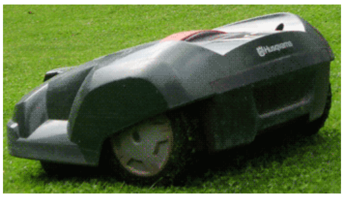
Aufgabe 4: Analysis & Lineare Algebra – Themenmix



Das Unternehmen MÄH-ROB GmbH produziert u.a. verschiedene Typen von Mährobotern.
Bisher war die MÄH-ROB GmbH nur im Bereich Norddeutschland als Anbieter auf dem Markt und möchte ihr Geschäftsfeld auf den Vorderpfälzer Bereich erweitern. Natürlich befindet man sich in Konkurrenz zu anderen Unternehmen und hat auf der Basis von Marktuntersuchungen folgendes Wechselverhalten im Turnus von drei Jahren ermitteln lassen:

- Vom Konkurrent **(A)dli** wechseln 20 % der Kunden zu Konkurrent **(B)ock**; 30 % bleiben bei einem Neukauf bei **(A)dli** – der Rest würde wohl sein Glück bei **(M)ÄH-ROB** probieren
- Bei Konkurrent **(B)ock** verbleiben 10 % der Kunden, 30 % wechseln zu **(A)dli** – alle weiteren würden dem neuen Anbieter **(M)ÄH-ROB** das Vertrauen schenken.
- **(M)ÄH-ROB** selbst möchte mit entsprechenden Marketingmaßnahmen 90 % seiner Kundschaft binden; der Rest wechselt zu gleichen Teilen zu den beiden Konkurrenten.

.

4.1 Vervollständigen Sie aufgrund des beschriebenen Verhaltens die ***Übergangsmatrix*** **[8]**

$$U = \left(\begin{array}{c|ccc} \downarrow & A & B & M \\ \hline A & \square & \square & \square \\ B & \square & \square & \square \\ M & \square & \square & \square \end{array}\right)$$

und zeigen Sie, dass die ***Inverse zur Übergangsmatrix*** folgende Form annehmen kann:

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} -2,4 & 9,6 & -0,4 \\ 6,2 & -9,8 & 0,2 \\ -2,8 & 1,2 & 1,2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$U = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,05 \\ 0,2 & 0,1 & 0,05 \\ 0,5 & 0,6 & 0,9 \end{pmatrix}$$

Probe: $U \cdot U^{-1} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4: Analysis & Lineare Algebra – Themenmix

4.2 Die aktuellen Marktanteile belaufen sich auf: **[5]**

(A)dli: **2a** (B)ock: **3a** (M)ÄH-ROB: **0**

Bestimmen Sie daraus den Verteilungsvektor $\overrightarrow{p_0}$ **und** den Wert für **a** bei **insgesamt 2.000** Kunden.

Lösung:

$$\overrightarrow{p_0} = \begin{pmatrix} 2a \\ 3a \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{5a=2.000} \overrightarrow{p_0} = \begin{pmatrix} 800 \\ 1.200 \\ 0 \end{pmatrix} \quad mit\ a = 400$$

4.3 Mit welchen Marktanteilen ist in 3 $\left(\hat{=}\ \overrightarrow{p_1}\right)$ bzw. 6 $\left(\hat{=}\ \overrightarrow{p_2}\right)$ Jahren bei dem angenommenen Wechselverhalten zu rechnen? **[6]**

Lösung:

$$U \cdot \overrightarrow{p_0} = \overrightarrow{p_1} \quad \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,05 \\ 0,2 & 0,1 & 0,05 \\ 0,5 & 0,6 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,14 \\ 0,56 \end{pmatrix} = \overrightarrow{p_1}$$

$$U^2 \cdot \overrightarrow{p_0} = \overrightarrow{p_2} \quad oder \quad U \cdot \overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{p_2} \quad \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,05 \\ 0,2 & 0,1 & 0,05 \\ 0,5 & 0,6 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,14 \\ 0,56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,16 \\ 0,102 \\ 0,738 \end{pmatrix} = \overrightarrow{p_2}$$

4.4 Ermitteln Sie den Vektor $\overrightarrow{p_{-1}}$ und kommentieren Sie das Ergebnis kritisch. **[5]**

Lösung:

$$U \cdot \overrightarrow{p_{-1}} = \overrightarrow{p_0} \xrightarrow[\text{per LGS}]{\text{Lösung}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0,3 & 0,3 & 0,05 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 & 0,05 & 0,6 \\ 0,5 & 0,6 & 0,9 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \overrightarrow{p_{-1}} = \begin{pmatrix} 4,8 \\ -3,4 \\ -0,4 \end{pmatrix}$$

oder

$$U \cdot \overrightarrow{p_{-1}} = \overrightarrow{p_0} \xrightarrow[\text{per Inverse}]{\text{Lösung}} \overrightarrow{p_{-1}} = U^{-1} \cdot \overrightarrow{p_0} \rightarrow \overrightarrow{p_{-1}} = \begin{pmatrix} -2,4 & 9,6 & -0,4 \\ 6,2 & -9,8 & 0,2 \\ -2,8 & 1,2 & 1,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,8 \\ -3,4 \\ -0,4 \end{pmatrix}$$

Das Ergebnis ist nicht möglich, da die Komponenten größer als 1 und negativ sind.

Aufgabe 4: Analysis & Lineare Algebra – Themenmix

4.5 Langfristig wünscht sich (M)ÄH-ROB als potentieller Marktführer mind. 80 % Marktanteil.
Untersuchen Sie, ob dies aufgrund der Ausgangssituation realisierbar ist. **[8]**

Lösung:

$$U\cdot\vec{x} = \vec{x} \to U\cdot\vec{x}-\vec{x} = \vec{0} \to (U-E)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\xrightarrow[\text{hLGS}\to\text{inhomogenes LGS}]{\sum_{i=1}^{3} x_i=1} \left(\begin{array}{ccc|c} -0,7 & 0,3 & 0,05 & 0 \\ 0,2 & -0,9 & 0,05 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \vec{x} = \frac{1}{45}\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\38\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}0,089\\0,067\\0,844\end{pmatrix}$$

Der gewünschte Marktanteil wird mit 84,4 % übertroffen.

4.6 Erläutern Sie, wie sich die Übergangsmatrix in der Spalte „**(M)ÄH-ROB**“ verändert, wenn man von Seiten **(M)ÄH-ROB** eine langfristige Marktverteilung von 15 % bei **(A)dli** und 10 % bei **(B)ock** akzeptieren würde und das Wechselverhalten der Konkurrenz unverändert bliebe? **[8]**

Lösung:

$$U_{neu} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & x \\ 0,2 & 0,1 & y \\ 0,5 & 0,6 & 1-x-y \end{pmatrix} \quad und \quad \overrightarrow{p_{statisch}} = \begin{pmatrix}0,15\\0,1\\0,75\end{pmatrix}$$

$$Ansatz:$$

$$U_{neu}\cdot\overrightarrow{p_{statisch}} = \overrightarrow{p_{statisch}} \to \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & x \\ 0,2 & 0,1 & y \\ 0,5 & 0,6 & 1-x-y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0,15\\0,1\\0,75\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,15\\0,1\\0,75\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{array}{c|l} Zeile\,1 & 0,045+0,03+0,75x=0,15 \to 0,75x=0,075 \to x=0,1 \\ \hline Zeile\,2 & 0,03+0,01+0,75y=0,1 \to 0,75y=0,06 \to y=0,08 \\ \hline Zeile\,3 & \text{Probe}: 0,075+0,06+(1-0,1-0,08)\cdot 0,75=0,75 \; ☑ \end{array}$$

$$\to U_{neu} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,08 \\ 0,5 & 0,6 & 0,82 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4: Analysis & Lineare Algebra – Themenmix

4.7 Die Platzwerke stellen bei ihren Kunden aufgrund der vielen Käufe von Mährobotern einen erhöhten Energiebedarf fest. **[8]**
Dies führt zu Diskussionen über die drei Sektoren und den internen Verbrauch von (G)as, (W)asser und (S)trom und eine adäquate Abgabemöglichkeit an den Markt, um die Kunden nicht zu verlieren.
Die Verflechtung der drei Sektoren untereinander und mit dem Markt wird durch das Leontief-Modell mit folgender Input-Output-Tabelle und der Technologiematrix T beschrieben:

↱	G	W	S	Markt	Gesamtmenge
G	350	a	210	y_1	1.000
W	b	216	c	y_2	720
S	200	108	d	y_3	700

und $T = \begin{pmatrix} e & 0{,}15 & f \\ 0{,}25 & 0{,}3 & 0 \\ g & h & 0{,}25 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie die Werte der Koeffizienten a bis h und die **Marktabgabe** $\vec{y}$ der Sektoren G, W und S.

Lösung:

↱	G	W	S	Markt	Gesamtmenge
G	350	$\frac{a}{720} = 0{,}15 \rightarrow a = 108$	210	$y_1 = 1.000 - 350 - 108 - 210 = 332$	1.000
W	$\frac{b}{1.000} = 0{,}25 \rightarrow b = 250$	216	$\frac{c}{700} = 0 \rightarrow c = 0$	$y_2 = 720 - 250 - 216 - 0 = 254$	720
S	200	108	$\frac{d}{700} = 0{,}25 \rightarrow d = 175$	$y_3 = 700 - 200 - 108 - 175 = 217$	700

$$und \quad T = \begin{pmatrix} e = \frac{350}{1.000} = 0{,}35 & 0{,}15 & f = \frac{210}{700} = 0{,}3 \\ 0{,}25 & 0{,}3 & 0 \\ g = \frac{200}{1.000} = 0{,}2 & h = \frac{108}{720} = 0{,}15 & 0{,}25 \end{pmatrix}$$

Aufgrund angepasster Produktionsentscheidungen gehen wir nun von folgender Leontief-Inversen aus:

$$(E - T)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 15 & 10 \\ 0 & 15 & 10 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

4.8 Geben Sie die Anzahl der Mengeneinheiten von jedem der drei Sektoren an, die an den Markt abgegeben werden, wenn eine Gesamtproduktion von $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10.000 \\ 8.000 \\ 3.500 \end{pmatrix}$ existiert? **[8]**

Aufgabe 4: Analysis & Lineare Algebra – Themenmix

Lösung:

$$Ansatz: \; T\cdot\vec{x}+\vec{y}=\vec{x} \;\rightarrow\; \vec{y}=\vec{x}-T\cdot\vec{x}=(E-T)\cdot\vec{x} \;\rightarrow\; (E-T)^{-1}\cdot\vec{y}=\vec{x}$$

$$\xrightarrow{LGS} (E-T)^{-1}\cdot\vec{y}=\vec{x} \;\rightarrow\; \begin{pmatrix}5 & 15 & 10\\ 0 & 15 & 10\\ 0 & 5 & 5\end{pmatrix}\cdot\vec{y}=\begin{pmatrix}10.000\\ 8.000\\ 3.500\end{pmatrix} \;\rightarrow\; \vec{y}=\begin{pmatrix}400\\ 200\\ 500\end{pmatrix}$$

oder

$$\xrightarrow[(E-T)^{-1}]{Inverse\ zu} \vec{y}=(E-T)\cdot\vec{x} \;\rightarrow\; \vec{y}=\begin{pmatrix}0,2 & -0,2 & 0\\ 0 & 0,2 & -0,4\\ 0 & -0,2 & 0,6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10.000\\ 8.000\\ 3.500\end{pmatrix} \;\rightarrow\; \vec{y}=\begin{pmatrix}400\\ 200\\ 500\end{pmatrix}$$

4.9 Aufgrund der Ergebnisse in Auftrag gegebener Marktprognosen entwickelt sich der Versorgungsbedarf für (G)as, (W)asser und (S)trom im Zeitraum der kommenden Monate unterschiedlich, so dass auf der Basis folgender Gesamtproduktion kalkuliert wird.

$$\vec{x_k} = \begin{pmatrix}-k^2+8.000\\ 8.000\cdot e^{-k}\\ 1.500+5k\end{pmatrix} \quad mit \quad k=[0;12]$$

Dabei soll k für einen Zeitpunkt innerhalb des Betrachtungszeitraums stehen.

4.9.1 Beschreiben Sie die Entwicklung der Gesamtproduktion für (G)as, (W)asser und (S)trom in den kommenden 12 Monaten. **[6]**

Lösung:

$$\begin{pmatrix}-k^2+8.000\\ 8.000\cdot e^{-k}\\ 1.500+5k\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}\text{Gesamtproduktion fällt pro Zeitintervall um } \mathrm{k}^2 ME\\ \text{Gesamtproduktion fällt pro Zeitintervall, da Nenner } \mathrm{e}^{\mathrm{k}} \text{ zunimmt}\\ \text{Gesamtproduktion steigt pro Zeitintervall um 5 ME}\end{pmatrix}$$

4.9.2 Zeigen Sie, dass die möglichen Abgaben an den Markt folgende Darstellung annehmen kann: **[8]**

$$\vec{y}=\begin{pmatrix}-1.600e^{-k}-0,2k^2+1.600\\ 1.600e^{-k}-600-2k\\ -1.600e^{-k}+900+3k\end{pmatrix}$$

und ermitteln Sie den Zeitpunkt, in dem das **Maximum der Summe der Marktabgaben** erreicht wird.

Aufgabe 4: Analysis & Lineare Algebra – Themenmix

Lösung:

Ansatz:

$$T\cdot\vec{x}+\vec{y}=\vec{x} \;\rightarrow\; \vec{y}=\vec{x}-T\cdot\vec{x}=(E-T)\cdot\vec{x} \quad mit \quad \overrightarrow{x_k} = \begin{pmatrix} -k^2+8.000 \\ 8.000\cdot e^{-k} \\ 1.500+5k \end{pmatrix} \quad mit \quad k=[0;12]$$

$$\xrightarrow[(E-T)^{-1}]{\text{Inverse zu}} \vec{y}=(E-T)\cdot\vec{x} \;\rightarrow\; \vec{y}=\begin{pmatrix} 0,2 & -0,2 & 0 \\ 0 & 0,2 & -0,4 \\ 0 & -0,2 & 0,6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -k^2+8.000 \\ 8.000\cdot e^{-k} \\ 1.500+5k \end{pmatrix} \;\rightarrow\; \vec{y}=\begin{pmatrix} -1.600e^{-k}-0,2k^2+1.600 \\ 1.600e^{-k}-600-2k \\ -1.600e^{-k}+900+3k \end{pmatrix}$$

Summe der Marktabgaben (= Summe der Komponenten von Vektor y):

$$f(k) = \sum_{i=1}^{3} y_i = -1.600e^{-k}-0,2k^2+1.600+1.600e^{-k}-600-2k+\left(-1.600e^{-k}\right)+900+3k$$

$$f(k) = -1.600e^{-k}-0,2k^2+k+1.900$$

$$f'(k) = 1.600e^{-k}-0,4k+1 \overset{!}{=} 0 \xrightarrow[\text{mit WTR}]{\text{Iteration}} k \approx 6.83 \rightarrow \text{in knapp 7 Monaten}$$

4.9.3 Begründen Sie, dass Ihr Wert ein Maximum darstellt – denken Sie dabei nicht nur an die Differentialrechnung 😊 - und beurteilen Sie, ob es sich dabei um ein globales Maximum handelt. **[7]**

Lösung:

$$f(k) = \sum_{i=1}^{3} y_i = -1.600e^{-k}-0,2k^2+k+1.900$$

$$f'(k) = 1.600e^{-k}-0,4k+1 \overset{!}{=} 0 \xrightarrow[\text{mit WTR}]{\text{Iteration}} k \approx 6.83 \rightarrow \text{in knapp 7 Monaten}$$

$$f''(k) = -1.600e^{-k}-0,4 \xrightarrow{k\,\approx\,6.83} f''(6,83) < 0 \rightarrow \text{relatives Maximum} \rightarrow f(6,83) = 1.895,77$$

$$\text{Randwerte:} \quad f(0) = 300 \quad \text{und} \quad f(12) = 1.883,19$$

$$\rightarrow f(6,83) = 1.895,77 \rightarrow \text{globales Maximum}$$

4.9.4 In welchem Monat - ausgehend von heute (Mai 2023) – wird die maximale Marktabgabe realisiert? **[3]**

Lösung:

k = 0: aktuell in Mai 2023

k = 6: Mai + 6 Monate => November 2023

k = 7: Mai + 7 Monate => Dezember 2023

k = 6,83: Übergang zwischen November/Dezember 2023

Aufgabe 4: Analysis & Lineare Algebra – Themenmix

Allgemeine Informationen zur Aufgabenstellung:

Erwartungshorizont Aufgabe 4: Lineare Algebra mit Analysis

Die Aufgabe ist dem/den folgenden Lernbereich/en zuzuordnen:

☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7a ☐ 7b

Die fachlichen Inhalte wurden in dem (den) folgenden Halbjahr(en) unterrichtet:

☐ 12/1 ☒ 12/2 ☐ 13/1 ☒ 13/2

Zuordnung der Bewertungseinheiten zu den Anforderungsbereichen sowie zu den allgemeinen mathematischen Kompetenzen:

Teil-Aufg.	BE	Allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
4.1	8	I	II	I		II		4	4	
4.2	5		I	I	II		II	2	3	
4.3	6		I	I	I			6		
4.4	5	II	II			II	II		5	
4.5	8	III	III		II	II	II		3	5
4.6	8	II	III		III		III		1	7
4.7	8	II	II	II	II	I		2	6	
4.8	8		II	II		II	II		8	
4.9.1	6	II	I		I	II	I	3	3	
4.9.2	8	III	III							8
4.9.3	7	II	III		III		II		3	4
4.9.4	3	I	I	I			I	3		
Summe	**80**							**20**	**36**	**24**

Bewertungsschema:

Notenpunkte	mindestens zu erreichender Anteil an den insgesamt zu erreichenden Bewertungseinheiten
15	95%
14	90%
13	85%
12	80%
11	75%
10	70%
09	65%
08	60%
07	55%
06	50%
05	45%
04	40%
03	33%
02	27%
01	20%
00	0%