11. Jgst.	**4. Kursarbeit**	**Datum: 03.06.2022**
Klasse: GY 21b	**Gruppe A**	**Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: Ganzrationale Funktionen; Kurvendiskussion

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Name:	
Punkte:	Note:

1.) Hoch- und Wendepunkte **12**

a) Wie lautet die notwendige Bedingung für einen **Hoch**punkt? $f'(x) = 0$

b) Nennen Sie die hinreichende Bedingung für einen **Hoch**punkt?

$$f'(x) = 0 \quad und \quad f''(x) < 0$$

$$oder: \quad f'(x) = 0 \quad und \quad f'(x-h) > 0 \quad \wedge \quad f'(x+h) < 0$$

c) Was versteht man unter einem Sattelpunkt?

Unter einem Sattelpunkt/Terrassenpunkt einer Funktion versteht man eine Stelle x_0, für die gilt:

$$f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$$

$\rightarrow$ Einen Wendepunkt mit Steigung m = 0.

d) Gegeben sei die Funktion $f_k(x) = 3x^2 - 4kx + 2$

Zeigen Sie, dass diese Funktion keinen Wendepunkt besitzen kann.

$$f_k(x) = 3x^2 - 4kx + 2 \quad \rightarrow \quad f_k'(x) = 6x - 4k$$

$f_k''(x) = 6 \overset{!}{=} 0 \quad Widerspruch \quad \rightarrow$ Notwendiges Kriterium für Wendepunkte nicht erfüllt.

2.) Welche Symmetrie liegt vor? Begründen Sie Ihre Entscheidung. **9**

(i) $f(x) = -4x^6 + 2x^4 + x^2 - 1$

$$f(-x) = -4(-x)^6 + 2(-x)^4 + (-x)^2 - 1 = -4x^6 + 2x^4 + x^2 - 1 = f(x)$$

$\rightarrow$ *Achsensymmetrie*

(ii) $f(x) = -2x^7 + x^3 - 4x$

$$f(-x) = -2(-x)^7 + (-x)^3 - 4(-x) = 2x^7 - x^3 + 4x = -f(x)$$

$\rightarrow$ *Punktsymmetrie*

(iii) $f(x) = -4x^{8(n+1)} + 3x^{2n} \quad mit \quad n \in N$

$$f(-x) = -4(-x)^{8(n+1)} + 3(-x)^{2n} = -4x^{8(n+1)} + 3x^{2n} = f(x)$$

$\rightarrow$ *Achsensymmetrie*

3.) Kurvenuntersuchung | 20 | |

Bestimmen Sie bei der folgenden Funktion $f(x) = -3x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 4x$

(i) die Nullstellen, (iii) die Monotonieintervalle

(ii) die Extremwertstellen, (iv) und die Wendestelle(n)

Nullstellen:

$$f(x) = \left(-3x^2 + \frac{5}{2}x + 4\right)x = 0 \rightarrow x_1 = 0$$

$$und \quad x = \frac{-\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 48}}{-2} = \frac{-\frac{5}{2} \pm 7{,}36}{-6} \rightarrow x_2 = -0{,}81 \quad und \quad x_3 = 1{,}64$$

Extremwerte:

$$f'(x) = -9x^2 + 5x + 4 = 0 \rightarrow x_1 = 0$$

$$und \quad x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 144}}{-18} = \frac{-5 \pm 13}{-18} \rightarrow x_1 = 1 \quad und \quad x_2 = -\frac{4}{9}$$

$$f''(x) = -18x + 5 \rightarrow f''(1) = -13 < 0 \rightarrow Max(1 \mid 3{,}5)$$

$$f''(x) = -18x + 5 \rightarrow f''\left(-\frac{4}{9}\right) = 13 > 0 \rightarrow Min$$

Monotonie-Intervalle:

$I_1 = \left]-\infty; -\frac{4}{9}\right[$ *streng monoton fallend* $\quad I_2 = \left]-\frac{4}{9}; 1\right[$ *streng monoton steigend*

$I_3 = \left]1; \infty\right[$ *streng monoton fallend*

Wendpunkte:

$$f'(x) = -9x^2 + 5x + 4$$

$$f''(x) = -18x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{5}{18} \approx 0{,}28$$

$$f'''(x) = -18 \neq 0 \rightarrow x \approx 0{,}28 \; ist \; Wendestelle$$

4.) **Steigungen und Tangente(n)** | 12 | |

Gegeben sei folgende Funktion: $f(x) \; = \; -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 4$

a) Berechnen Sie die Tangente in x = 2 an die Funktion

b) An welchen Stellen hat die Funktion eine Tangente mit folgender Gleichung:

$$t(x) \; = \; x + b \quad mit \quad b \in \Re$$

Tangentengleichung:

$$\left.\begin{aligned} f(2) \; &= \; -\frac{8}{3} + 4 - 4 \; = \; -\frac{8}{3} \\ f'(x) \; &= \; -x^2 + 2x \xrightarrow{x=2} f'(2) \; = \; -4 + 4 = 0 \end{aligned}\right\} \; t(x) = -\frac{8}{3}$$

Wo liegen die Punkte mit der Steigung m = 1?

$$f'(x) \; = \; -x^2 + 2x \; \overset{!}{=} \; 1 \;\rightarrow\; -x^2 + 2x - 1 \; \overset{!}{=} \; 0$$

$$\rightarrow \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{-2} \; = \; 1 \xrightarrow[Punkte]{f(x) \; = \; -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 4} f(1) = -\frac{10}{3} \;\rightarrow\; P\left(1 \,\middle|\, -\frac{10}{3}\right)$$

20	

5.) „Absatzprobleme“

Während ihrer umfangreichen Reisetätigkeit mit der Deutschen Bahn AG ist der Ernährungs- und Gesundheitsberaterin Kunigunde Veggie-Börger aufgefallen, dass ein bemerkenswerter Zusammenhang besteht zwischen der Höhe h (in cm) ihrer Stöckelschuhe und der Wahrscheinlichkeit w(h) dafür, dass sie ihren Reiskoffer selbst vom Bahnsteig zum Taxi tragen muss.
Der funktionale Zusammenhang zwischen w und h kann durch folgende Funktion beschrieben werden:

$$w(h) \;=\; \frac{1}{100}h^2 - 0{,}16h + 0{,}9 \quad mit \quad h \in [0\,;10]$$

a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit den Koffer selbst tragen zu müssen, wenn h die Werte der Intervallgrenzen annimmt?

$$w(0) \;=\; 0{,}9 \;\rightarrow\; 90[\%] \quad und \quad w(10) \;=\; \frac{100}{100} - 0{,}16 \cdot 10 + 0{,}9 \;=\; 0{,}3 \;\rightarrow\; 30[\%]$$

b) Wie hoch darf die Absatzhöhe maximal sein, damit die Wahrscheinlichkeit w(h) höchstens 50 % beträgt?

$$\frac{1}{100}h^2 - 0{,}16h + 0{,}9 \;\leq\; 0{,}5 \;\xrightarrow{-0{,}5}\; \frac{1}{100}h^2 - 0{,}16h + 0{,}4 \;\leq\; 0$$

$$h_{1/2} \;=\; \frac{0{,}16 \pm \sqrt{0{,}0256 - 0{,}016}}{\frac{2}{100}} \;=\; \frac{0{,}16 \pm \sqrt{0{,}0256 - 0{,}016}}{\frac{2}{100}} \;=\; \frac{0{,}16 \pm 0{,}098}{\frac{2}{100}}$$

$$h_1 \;\leq\; 12{,}9 \quad und \quad h_2 \;\geq\; 3{,}1 \;\Rightarrow\; h \in [3{,}1\,;10]$$

Die Lösung $h_1 = 12{,}9$ ist nicht im Definitionsbereich.

c) Welchen Wert nimmt die **momentane Änderungsrate der Wahrscheinlich** bei h = 2 an?

$$w'(h) \;=\; \frac{1}{50}h - 0{,}16 \;\xrightarrow{h=2}\; w'(2) \;=\; \frac{1}{25} - 0{,}16 \;=\; -0{,}12$$

Erläutern Sie dieses Ergebnis im Sachzusammenhang der Aufgabe.

d) Bei welcher Absatzhöhe ist die Wahrscheinlichkeit, den Koffer selbst tragen zu müssen, am kleinsten?
Anmerkung: ***Zeigen Sie, dass Ihre Lösung ein Minimum darstellt***.

$$w'(h) \;=\; \frac{1}{50}h - 0{,}16 \;=\; 0 \;\rightarrow\; h \;=\; 8$$

$$w''(h) \;=\; \frac{1}{50} \;>\; 0 \;\rightarrow\; Min\, bei\, h \;=\; 8 \;\rightarrow\; Min(8 \mid 0{,}26)$$



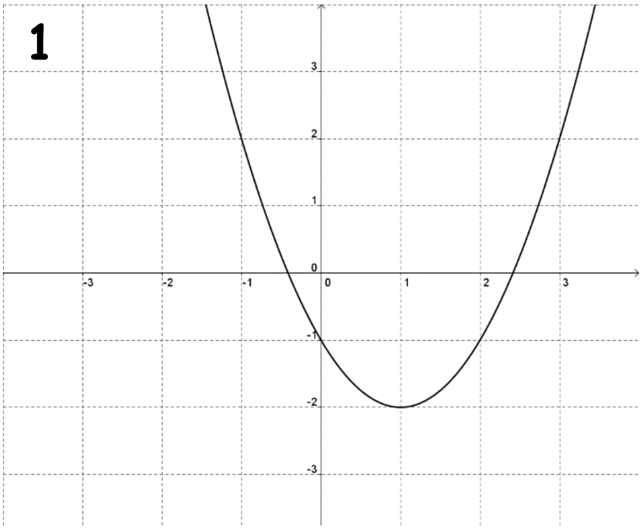

12	

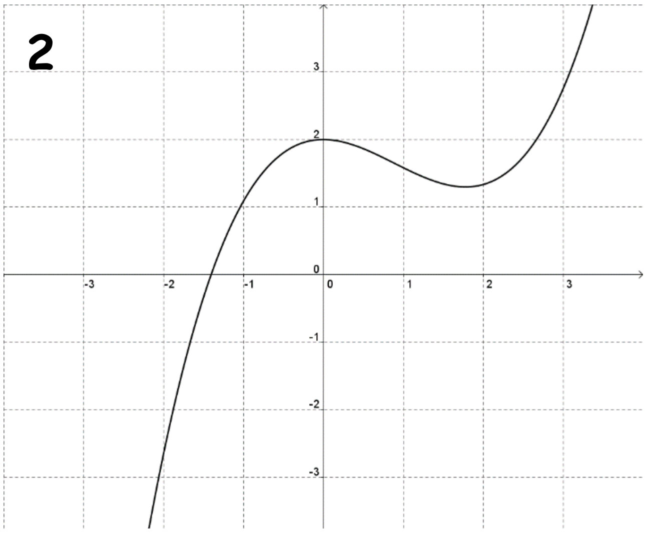
6.) Zuordnung: Funktion - Graph

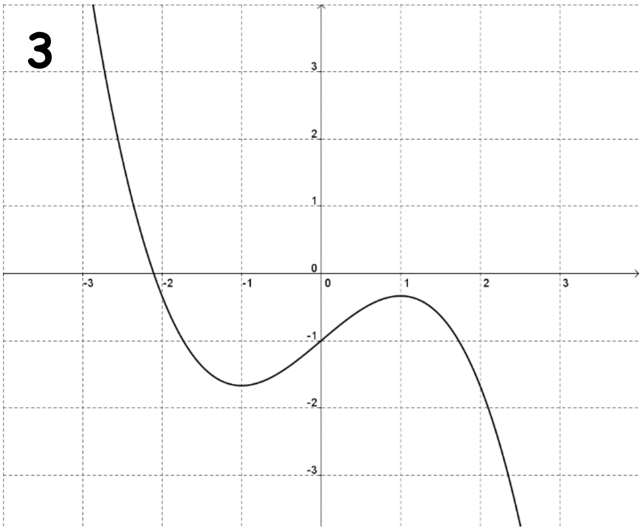
Ordnen Sie drei der Funktionen die Ableitungsgraphen zu und begründen Sie kurz Ihre Entscheidung durch *zwei Kennzeichen*.

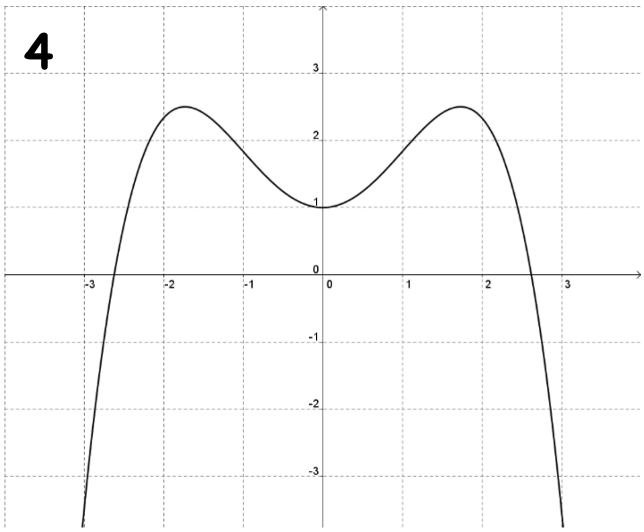
Für eine Funktion ist leider kein Ableitungsgraph vorhanden – den müssen Sie leider selbst zeichnen.

Funktionen



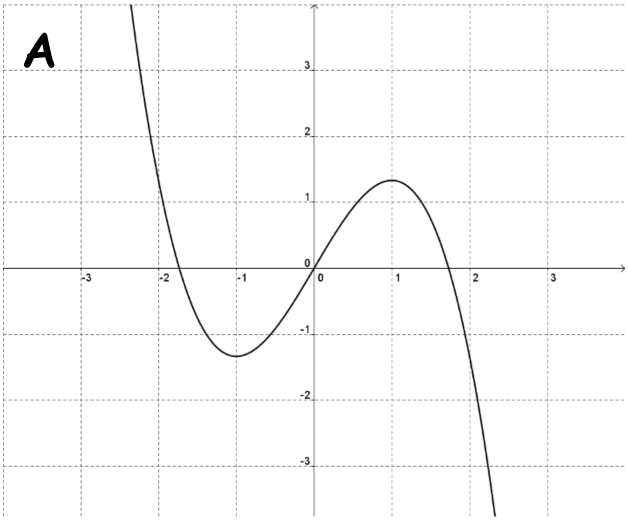




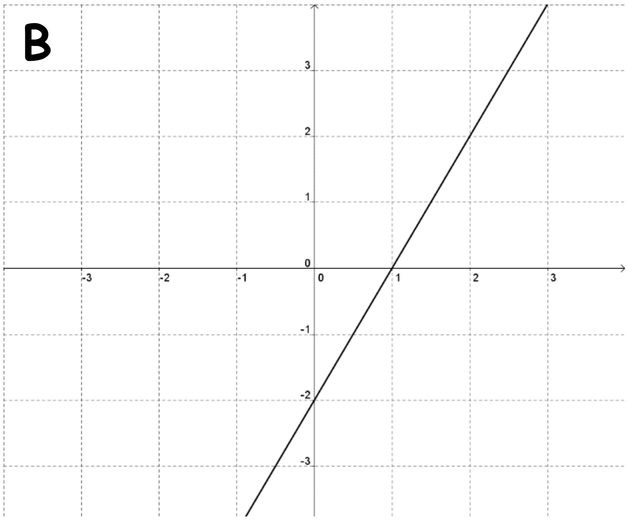


Ableitungen

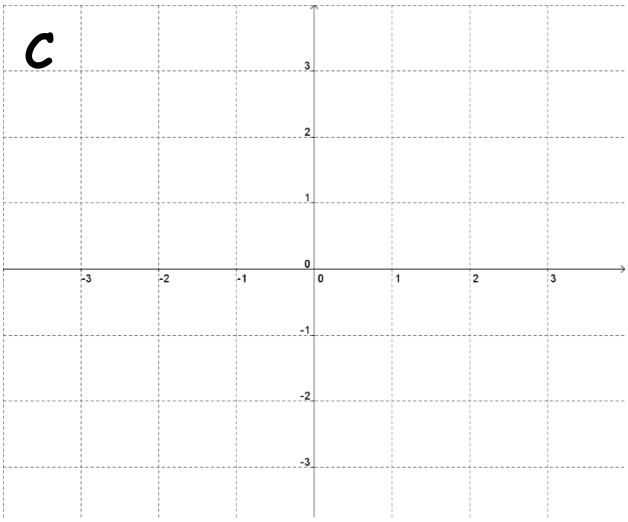
A



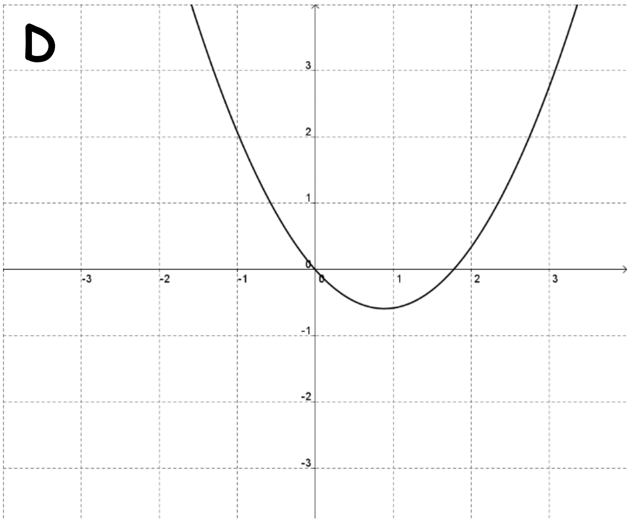
B



C



D



Zuordnungen:

1 => B

quadratische Funktion	**=>**	**lineare Ableitungsfunktion**
Tiefpunkt bei x = 1	**=>**	**Nullstelle bei x = 1**

2 => D

Funktion vom Grad n = 3	**=>**	**quadratische Ableitungsfunktion**
Hochpunkt bei x = 0	**=>**	**Nullstelle bei x = 0**
Tiefpunkt bei x = 2	**=>**	**Nullstelle bei x = 2**

4 => A

Funktion vom Grad n = 4	**=>**	**Ableitungsfunktion vom Grad n = 3**
Hochpunkte bei x = ± 2	**=>**	**Nullstelle bei x = ± 2**
Tiefpunkt bei x = 0	**=>**	**Nullstelle bei x = 0**

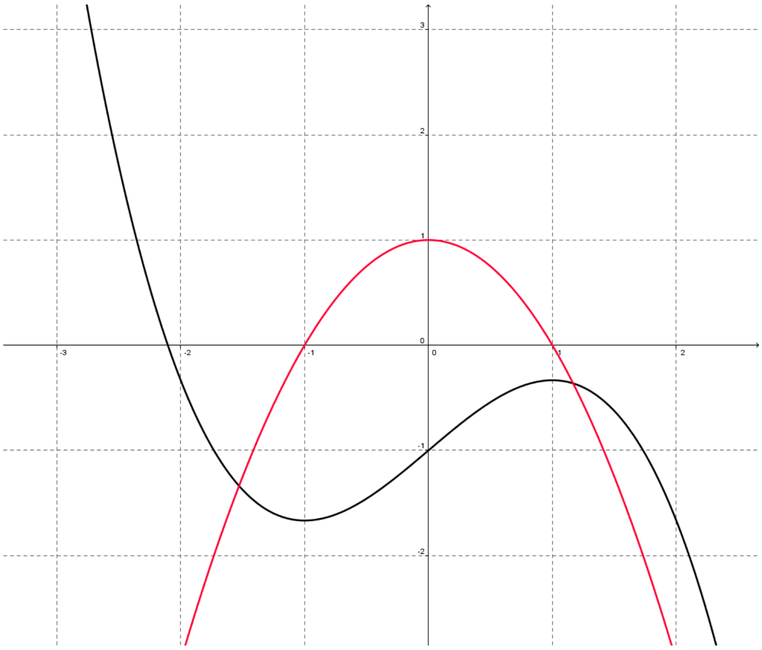
Ableitungsgraph zu 3

Funktion vom Grad n = 3	**=>**	**quadratische Ableitungsfunktion**
Hochpunkt bei x = 1	**=>**	**Nullstelle bei x = 1**
Tiefpunkt bei x = - 1	**=>**	**Nullstelle bei x = - 1**

Streng monoton fallend bis x = - 1:
=> Ableitungsgraph verläuft unterhalb der x-Achse

Streng monoton steigend bis x = 1:
=> Ableitungsgraph verläuft oberhalb der x-Achse

Streng monoton fallend ab x = 1:
=> Ableitungsgraph verläuft unterhalb der x-Achse



7.) **Wissen – Rechnen – Entscheiden – Beurteilen - Begründen**

58	

(i) **Beurteilen *<u>(Entscheiden und Begründen)</u>* Sie, ob die Aussagen (W)ahr oder (F)alsch sind.**

Aussage 1: **Ableitung und momentane Änderungsrate beschreiben denselben Sachverhalt.**

WAHR $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = m = \tan(\alpha)$

Aussage 2: **Gilt $f'(-2) = 3$, so hat die Ableitung von f an der Stelle 3 den Wert -2.**

Der Wert der Ableitung an der Stelle x = 3 lautet m = - 2 folgt $f'(3) = -2$

FALSCH *oder*

$f'(-2) = 3$ *heißt*: der Wert der Ableitung an der Stelle x = - 2 lautet m = 3.

Aussage 3: **Existiert für f die momentane Änderungsrate in x_0, so ist f differenzierbar in x_0.**

WAHR $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = m = \tan(\alpha)$

(ii) **Bestimmen Sie den Wert der Steigung an der Stelle x_0:**

a) $f_k(x) = 0,2x^3 + k \quad in\ x_0 = 1,5$

$$f_k'(x) = 0,6x^2 \xrightarrow{x_0 = 1,5} f_k'(1,5) = 0,6 \cdot 2,25 = 1,35$$

b) $f_k(x) = \frac{2}{x} + 3k \quad in\ x_0 = -0,5$

$$f_k'(x) = -\frac{2}{x^2} \xrightarrow{x_0 = -0,5} f_k'(-0,5) = -\frac{2}{(-0,5)^2} = -\frac{2}{0,25} = -8$$

(iii) **Der Temperaturverlauf in einem Ofen lässt sich durch die Funktion T mit**
$T(t) = 30\sqrt{t} + 15$ ($0 \le t \le 30$, t in Minuten, T in °C) beschreiben.

a) Berechnen Sie den Wert T(25) – T(9) *<u>und</u>* erklären Sie das Ergebnis im Anwendungsbezug.

$$T(t) = 30\sqrt{t} + 15$$

$$\left.\begin{array}{l} T(25) = 30 \cdot \sqrt{25} + 15 = 165 \\ T(9) = 30 \cdot \sqrt{9} + 15 = 105 \end{array}\right\} \Delta T = 60$$

Die Temperatur nimmt innerhalb der 16 Minuten um 60 Grad Celsius zu.

b) Steigt oder fällt die Temperatur für t = 25?

$$T(t) = 30\sqrt{t} + 15 \to T'(t) = \frac{15}{\sqrt{t}} \to T'(25) = \frac{15}{\sqrt{25}} = 3$$

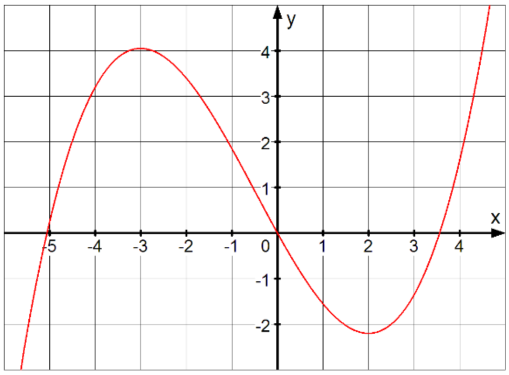
Die Temperatur steigt um 3 Grad Celsius.

c) Was bedeutet $T'(9) = 5$ konkret für das Beispiel?

Die Temperatur ändert (= erhöht) sich in der 9. Minute um 5 Grad Celsius.

d) Wie hoch ist die Temperatur zu Beginn des Verlaufs? $T(0) = 15$

(iv) ***Begründen*** **Sie aufgrund des Graphen, weshalb die Aussagen (F)alsch sind** ***und berichtigen*** **Sie diese.**



Aussage 1: **Für $x < -2$ fällt f monoton.**

Die Funktion steigt monoton bis x = -3; danach fällt sie im Intervall [-3 ; 2] monoton; ab x = 2 steigt die Funktion wiederum monoton an.

Aussage 2: **Für $-3 < x < 2$ steigt f** ***streng*** **monoton.**

Die Aussage muss zu „fällt" verändert werden.

Aussage 3: **Für $2 \leq x$ steigt f** ***streng*** **monoton.**

Die Aussage muss entweder auf „f steigt monoton" abgemildert werden oder man formuliert x > 2 als Bedingungsgrenze.

(v) **Entscheiden Sie, ob die Aussagen zu ganzrationalen Funktionen (W)ahr oder (F)alsch sind.**

Aussage 1: **Eine Nullstelle von f' ist** ***immer*** **eine Extremstelle von f.**

FALSCH => kann auch Sattelpunktstelle sein.

Aussage 2: **An einer inneren Extremstelle x_0 von f gilt** ***immer*** $f'(x_0) = 0$ **.**

WAHR => ist die notwendige Bedingung.

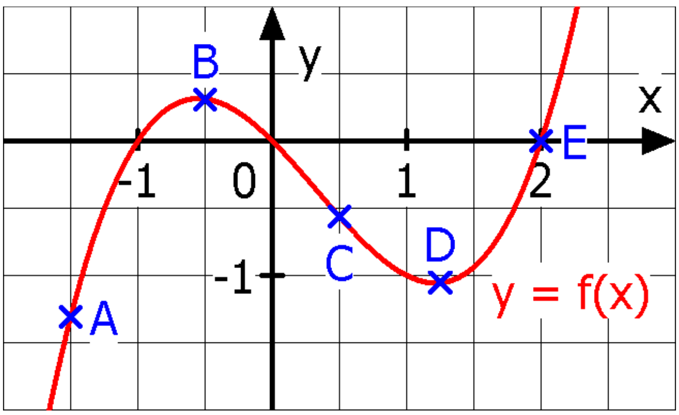
Aussage 3: **Hat f' einen Vorzeichenwechsel bei x_0, so liegt eine Extremstelle von f bei x_0 vor.**

WAHR => Alternative zur notwendigen Bedingung der 1. Ableitung.

Aussage 4: **Zwischen zwei benachbarten Hochpunkten des Graphen von f liegt** ***immer*** **ein Tiefpunkt.**

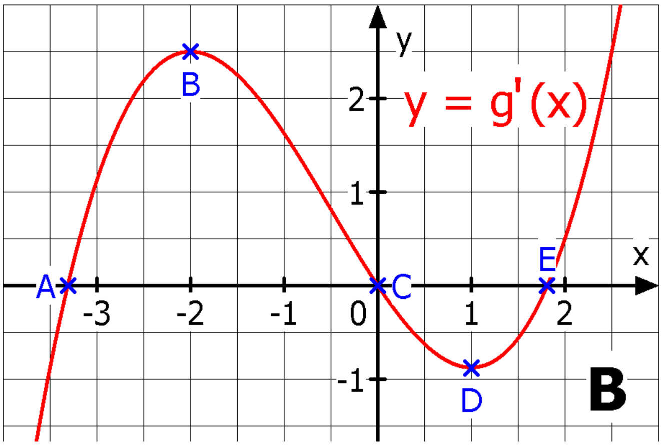
WAHR => Bei einer stetigen ganzrationalen Funktion muss dies gelten.

(vi) **Tragen Sie in der Tabelle ein, ob $f(x)$, $f'(x)$ und $f''(x)$ in den markierten Punkten positiv (>0), negativ (<0) oder Null sind**



	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
A	$f(x)<0$	$f'(x)>0$	$f''(x)<0$
B	$f(x)>0$	$f'(x)=0$	$f''(x)<0$
C	$f(x)<0$	$f'(x)<0$	$f''(x)=0$
D	$f(x)<0$	$f'(x)=0$	$f''(x)>0$
E	$f(x)=0$	$f'(x)>0$	$f''(x)>0$

(vii) **Abb. B zeigt den *<u>Graphen der Ableitung einer Funktion g</u>*. Die markierten Punkte sind entweder Extrempunkte (HP oder TP) oder Wendepunkte (WP) des Graphen von g. Füllen Sie die Tabelle aus**



	HP	TP	WP
A		**X**	
B			**X**
C	**X**		
D			**X**
E		**X**	

(viii) **Entscheiden Sie, ob die Aussagen zur Funktion f bzw. zu ihrem Graphen (W)ahr oder (F)alsch sind.**

Aussage 1: **Wendestellen von f sind Extremstellen von f'.**

WAHR =>

Es gilt: Bei Extremwertstellen muss die Funktion die Steigung m = 0 haben; damit eine waagrechte Tangente; da für Wendestellen gilt: f''(x) = 0 muss an dieser Stelle die 1. Ableitung f'(x) eine Extremwertstelle besitzen.

Aussage 2: **In einem Wendepunkt geht der Graph *<u>immer</u>* von einer Links- in eine Rechtskurve über.**

FALSCH => ***Es könnte auch ein Kurvenübergang von Rechts – nach Linkskrümmung vorliegen.***

Aussage 3: **Gilt $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, so ist W(x_0 | $f(x_0)$) Sattelpunkt des Graphen von f.**

WAHR => ***Dies ist die Definitionsbedingung eines Sattelpunktes.***

Aussage 4: **Jede ganzrationale Funktion f mit *<u>ungeradem Grad größer 1</u>* hat mindestens eine Wendestelle.**

WAHR => ***Der Grade der Funktion muss daher mind. n = 3 sein; der Grad der 2. Ableitung liegt daher bei n-2 => daher liegt wiederum ein ungerader Grad vor => Bedingungsgleichung wird daher immer lösbar sein.***

Aussage 5: **Jede achsensymmetrische ganzrationale Funktion f hat mindestens eine Wendestelle.**

FALSCH => ***Gegenbeispiel:*** $f(x) = x^2$