11. Jgst.	5. Test	Datum: 07.01.2022
Klasse: GY 21b	Fach: Mathematik (Kernfach)	

Thema: Ganzrationale Funktionen (Linearfaktoren, Symmetrie, Nullstellen, Horner-Schema)

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

1.) Horner-Schema (Theorie)

6

a) Erklären Sie kurz die Vorgehensweise des Horner-Schemas.

Lösung:

Auf der Basis der Koeffizienten einer ganzrationalen Funktion wird der Funktionswert ausgehend von einem vorgegebenen x-Wert ermittelt; dieser Vorgang geschieht durch eine iterative Vorgehensweise mittels Multiplikation des Ergebniskoeffizienten mit dem x-Wert und der spaltenweisen Addition des n-ten Koeffizienten mit dem jeweiligen Produkt aus Ergebniskoeffizient der Stelle n+1 und des Koeffizienten der Stelle n.

b) Nennen Sie **drei Aspekte**, für die das Horner-Schema verwendet werden kann.

Lösung:

(1) Ermittlung Funktionswert
(2) Ersatz der Polynomdivision
(3) Ermittlung von Werten der n-ten Ableitung
(4) Nullstellenberechnung
(5) Umrechnung von Zahlensystemen

2.) Horner-Schema (Praxis)

10

Bestimmen Sie die Funktionswerte mit dem Horner-Schema:

$$f(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6 \qquad \textit{für } x = -3$$

$$f(x) = x^3 + 4x^2 \qquad \textit{für } x = 10$$

Lösung:

f(x) =	1,00 x^4	5,00 x^3	5,00 x^2	-5,00 x^1	-6,00 x^0	
	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0	
	1,00	5,00	5,00	-5,00	-6,00	
x_0 = - 3	0,00	-3,00	-6,00	3,00	6,00	
	1,00	2,00	-1,00	-2,00	0,00	**f(-3)**

f(x) =	1,00 x^3	4,00 x^2	0,00 x	0,00	
	a_3	a_2	a_1	a_0	
	1,00	4,00	0,00	0,00	
x_0 = 10		10,00	140,00	1.400,000	
	1,00	14,00	140,00	1.400,000	**f(10)**

3.) **Nullstellen berechnen** 15

Bestimmen Sie die Nullstellen folgender Funktionen

a) $$f(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6$$

Lösung:

	x4	x3	x2	x1	x0	
f(x) =	1,00	5,00	5,00	-5,00	-6,00	
x0	a(4)	a(3)	a(2)	a(1)	a(0)	
	1,00	5,00	5,00	-5,00	-6,00	
-3	0,00	-3,00	-6,00	3,00	6,00	
	1,00	2,00	-1,00	-2,00	0,00	f(-3)
1	0,00	1,00	3,00	2,00		
	1,00	3,00	2,00	0,00	f(1)	
-1	0,00	-1,00	-2,00			
	1,00	2,00	0,00	f(-1)		
-2	0,00	-2,00				
	1,00	0,00	f(-2)			

b) $$f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$$

Lösung:

$$\xrightarrow[u=x^2]{Substitution} u^2 - 10u + 9 = 0 \xrightarrow{Lösungsformel} u_{1/2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-36}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2}$$

$$\rightarrow u_1 = 1 \quad und \quad u_2 = 9 \xrightarrow[u=x^2]{Re-Substitution} \left(x^2\right)_1 = 1 \quad und \quad \left(x^2\right)_2 = 9$$

$$\rightarrow x_{1/2} = \pm 1 \quad und \quad x_{3/4} = \pm 3$$

c) $$f(x) = x^{10} + x^9 - 110x^8$$

Lösung:

$$f(x) = x^{10} + x^9 - 110x^8 = 0 \xrightarrow[Nullprodukt]{Satz\ vom} \left(x^2 + x - 110\right)x^8 = 0$$

$$\rightarrow x = 0\,[achtfach]$$

$$\rightarrow x^2 + x - 110 = 0 \rightarrow x_{9/10} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+440}}{2} = \frac{-1 \pm 21}{2} \rightarrow x_9 = 10 \quad und \quad x_{10} = -11$$

4.) Lösungsverhalten bei quadratischen Gleichungen | 8 | |

Für welche Werte von k hat die quadratische Gleichung $\frac{1}{2}x^2 - x + k \;=\; 0$

(i) eine Lösung? (ii) zwei Lösungen? (iii) keine Lösung?

<u>Lösung:</u>

$$\textit{Analyse der Diskriminante}: \quad D = b^2 - 4ac \quad \rightarrow \quad D = 1 - 2k$$

$$\textit{Fall } 1: \quad \textit{eine Lösung} \quad \Leftrightarrow \quad D = 0 \quad \rightarrow \quad 1 - 2k = 0 \quad \rightarrow \quad k = \frac{1}{2}$$

$$\textit{Fall } 2: \quad \textit{zwei Lösungen} \quad \Leftrightarrow \quad D > 0 \quad \rightarrow \quad 1 - 2k > 0 \quad \rightarrow \quad k < \frac{1}{2}$$

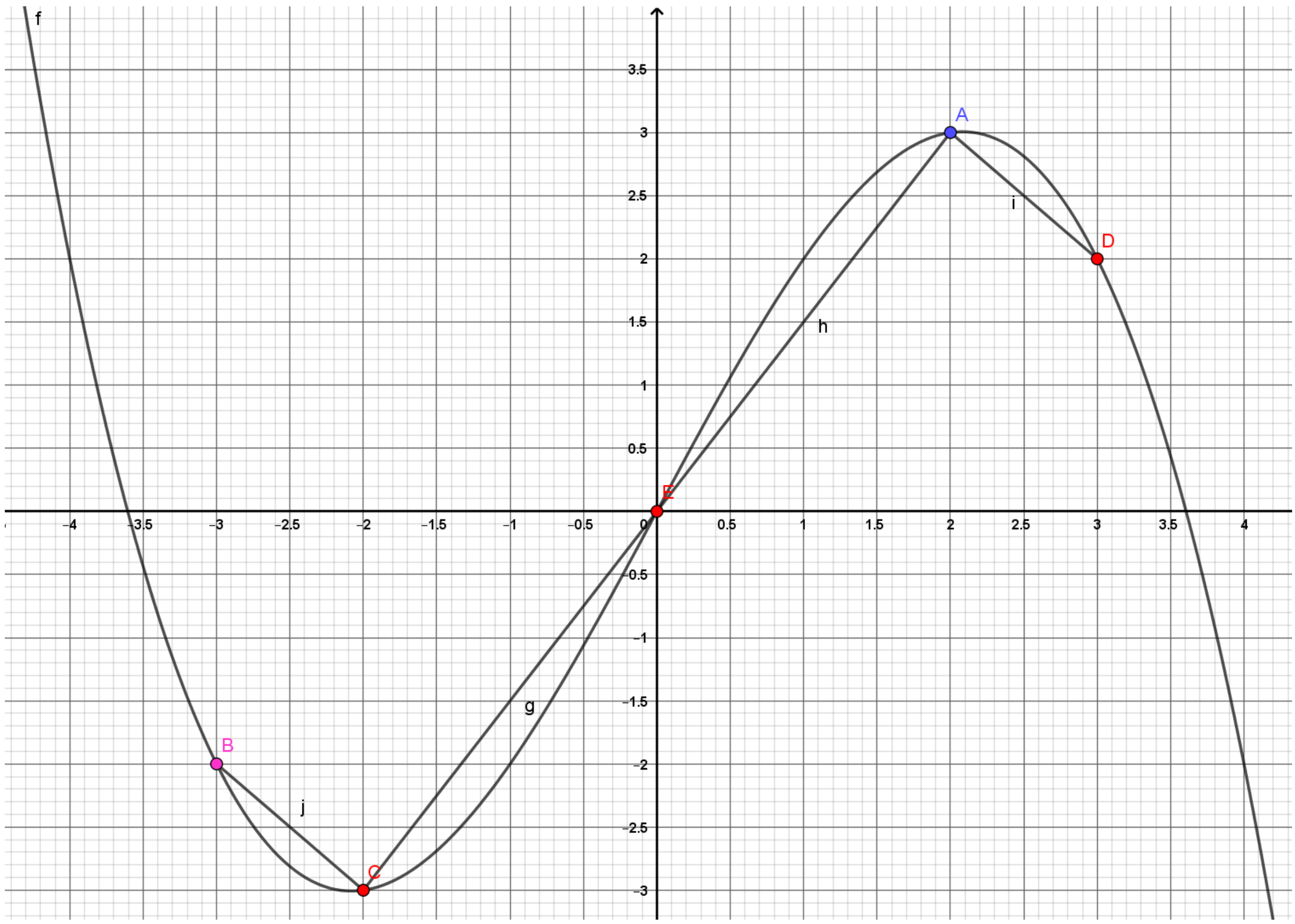
$$\textit{Fall } 3: \quad \textit{keine Lösung} \quad \Leftrightarrow \quad D < 0 \quad \rightarrow \quad 1 - 2k < 0 \quad \rightarrow \quad k > \frac{1}{2}$$

5.) Rekonstruktion ganzrationaler Funktionen (Grundstruktur) | 18 | |

a) Zeichnen Sie die beiden ganzrationalen Funktionen aufgrund der gegebenen Eigenschaften in die Koordinatensysteme:

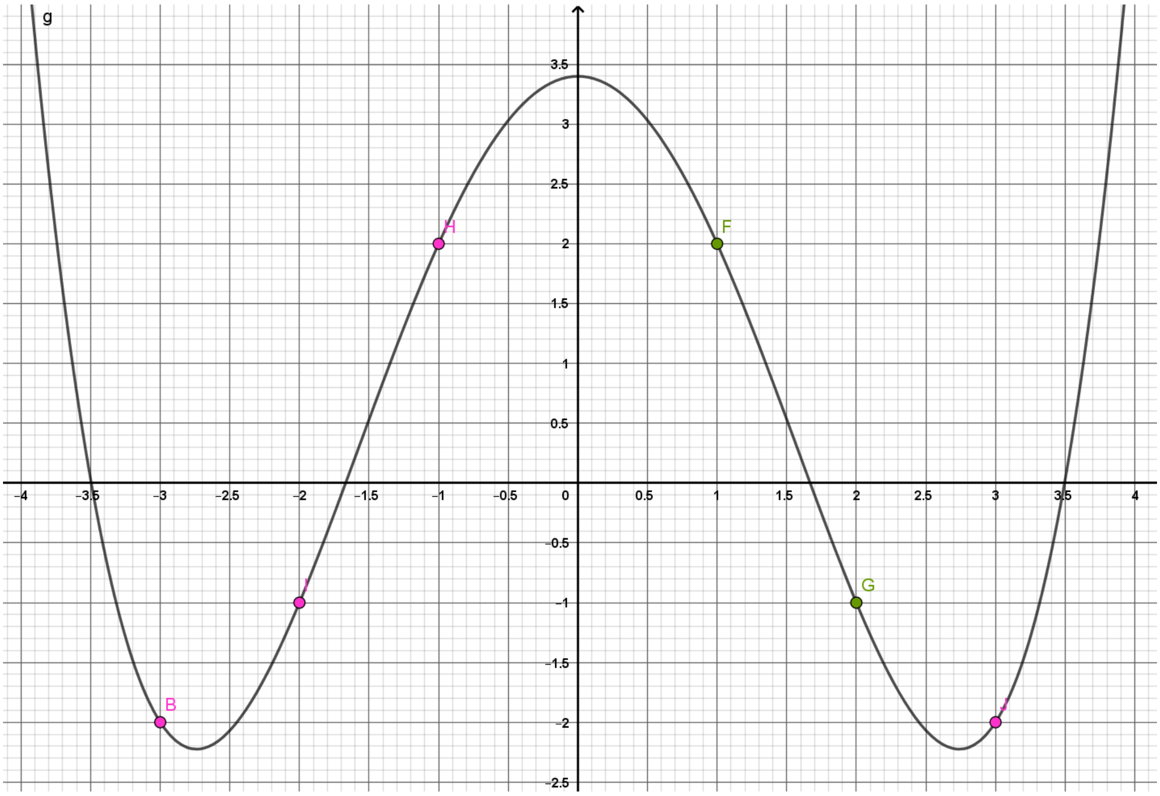
Funktion 1: Grad 3; punktsymmetrisch zum Ursprung; P(2/3) und Q(-3/-2)

<u>Lösung:</u>



Funktion 2: Grad 4; achsensymmetrisch; P(1/2); Q(2/-1) und R(-3/-2)

<u>Lösung:</u>



b) Ermitteln Sie die Funktionsvorschrift der ganzrationalen Funktionen aufgrund der gegebenen Eigenschaften in der Linearfaktordarstellung

Funktion 1: Grad 3; Nullstelle x = 3 (dreifach) und P(-1/8)

Funktion 2: Grad 4; Nullstelle x = -2 (dreifach); Nullstelle x=2 und P(1/3)

Funktion 3: Grad 4; P(1/2) und vier Nullstellen bei $x=\{-3;-1;2;5\}$

<u>Lösung:</u>

Funktion 1: Grad 3; Nullstelle x = 3 (dreifach) und P(-1/8)

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{Schritt 1: Nullstellen verwenden} & f(x) = a(x-3)^3 \\ \textit{Schritt 2: Punkt P einsetzen} & f(-1)=a(-1-3)^3=8 \;\rightarrow\; -64a=8 \;\rightarrow\; a=-\frac{1}{8} \end{array}\right\} f(x)=-\frac{1}{8}(x-3)^3$$

Funktion 2: Grad 4; Nullstelle x = -2 (dreifach); Nullstelle x=2 und P(1/3)

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{Schritt 1: Nullstellen verwenden} & f(x) = a(x+2)^3(x-2) \\ \textit{Schritt 2: Punkt P einsetzen} & f(1)=a(1+2)^3(1-2)=3 \;\rightarrow\; -27a=3 \;\rightarrow\; a=-\frac{1}{9} \end{array}\right\} f(x)=-\frac{1}{9}(x+2)^3(x-2)$$

Funktion 3: Grad 4; P(1/2) und vier Nullstellen bei $x=\{-3;-1;2;5\}$

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{Schritt 1: Nullstellen verwenden} & f(x) = a(x+3)(x+1)(x-2)(x-5) \\ \textit{Schritt 2: Punkt P einsetzen} & f(1)=a(1+3)(1+1)(1-2)(1-5)=2 \\ & \rightarrow\; 32a=2 \;\rightarrow\; a=\frac{1}{16} \end{array}\right\} f(x)=\frac{1}{16}(x+3)(x+1)(x-2)(x-5)$$

6.) Anwendungen zu Quadratischen ganzrationalen Funktionen

13	

Eine parabelförmige Bogenbrücke wird beschrieben durch:

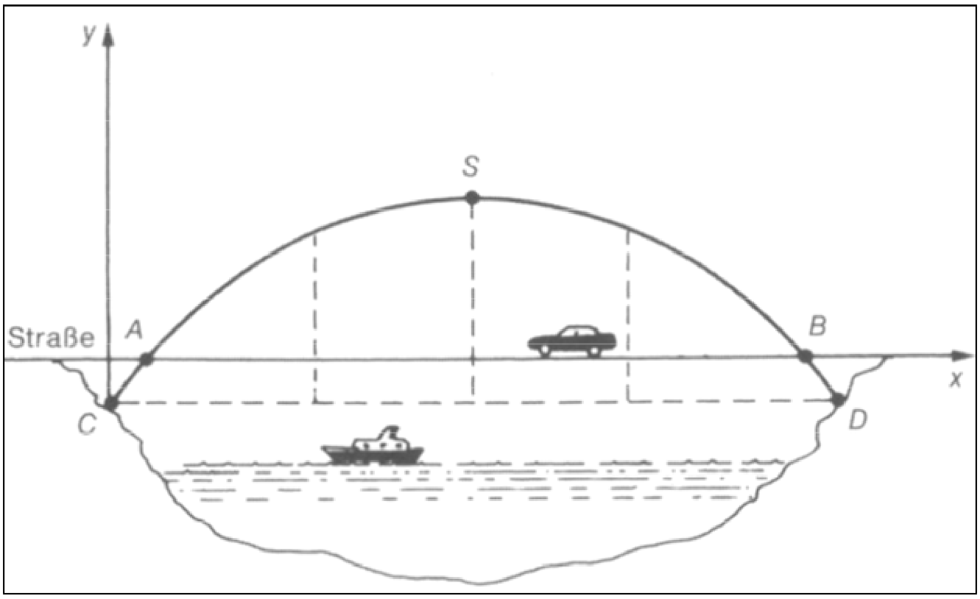
$$b(x) = -\frac{1}{25}x^2 + 2x - 9$$

Die unter Straßenniveau liegenden Auflagepunkte der Brücke sind C und D.

a) Bestimmen Sie die Höhe der Brücke vom Straßenniveau aus.

b) Berechnen Sie die Länge der Straße auf dieser Brücke.

c) Wie tief liegt der Auflagepunkt C unterhalb der Straße?



Lösung:

$$b(x) = -\frac{1}{25}x^2 + 2x - 9 \xrightarrow{\cdot(-25)} x^2 - 50x + 225$$

$$Nullstellen: \quad x^2 - 50x + 225 = 0 \rightarrow x_{1/2} = \frac{50 \pm \sqrt{2.500 - 900}}{2} = \frac{50 \pm 40}{2} \rightarrow x_1 = 5 \quad und \quad x_2 = 45$$

$$m_{NS} = \frac{5+45}{2} = 25 \rightarrow b(25) = -\frac{1}{25} \cdot 25^2 + 2 \cdot 25 - 9 = 16 [\text{Höhe der Brücke}]$$

$$Länge: \quad 45 - 5 = 40 \qquad S_y(0 \mid -9) \rightarrow 9[m] \text{ unterhalb der Straße}$$