11. Jgst.	6. Test	Datum: 04.02.2022
Klasse: GY 21b	Fach: Mathematik (Kernfach)	

Thema: Gebrochen-rationale Funktionen (Definitions-Menge, Polstellen und Lücken, h-Methode)

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

1.) Definitionsbereich, Polstellen und Nullstellen bestimmen

Bestimmen Sie den Definitionsbereich, die Pol- und die Nullstellen der Funktionen.

$$f(x) = \frac{x-2}{x+3} \qquad f_k(x) = \frac{x+1}{2x-5k} \qquad f(x) = \frac{x^2-8x+12}{x(x+3)(3x-9)}$$

Funktion	Definitionsbereich	Polstelle(n)	Nullstelle(n)
$f(x) = \frac{x-2}{x+3}$	$D = \Re \setminus \{-3\}$	$x=(-3)\,[mVZW]$	$x=2$
$f_k(x) = \frac{x+1}{2x-5k}$	$D=\Re \setminus \left\{\frac{5}{2}k\right\};\, k \neq -\frac{2}{5}$	$x=\frac{5}{2}k\,[mVZW]$	$x=(-1)$
$f(x) = \frac{x^2-8x+12}{x(x+3)(3x-9)}$	$D = \Re \setminus \{-3;0;3\}$	$x \in \{-3;0;3\}\,[mVZW]$	$x \in \{2;6\}$

2.) Definition einer gebrochen-rationalen Funktion

Definieren Sie den Begriff „gebrochen-rationale“ Funktion.

Definition: ***Unter einer gebrochen-rationalen Funktion versteht man eine Funktion, die als Quotient zweier ganzrationaler Funktionen gebildet wird.***

Es muss gelten: $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)} \quad mit \quad n(x) \neq 0$

3.) Untersuchung von Unendlichkeitsstellen mit der h-Methode

Untersuchen Sie die Funktion f(x) für deren Unstetigkeitsstellen mit der h-Methode nur von „rechts“: $f(x) = \frac{x^2+4x+4}{(x-5)(x+2)}$

$$f(x) = \frac{x^2+4x+4}{(x-5)(x+2)} = \frac{(x+2)^2}{(x-5)(x+2)} \qquad D=\Re \setminus \{-2;5\}$$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ x\to 5+h}} f(x) = \lim_{\substack{h\to 0\\ x\to 5+h}} \frac{(x+2)^2}{(x-5)(x+2)} = \lim_{h\to 0} \frac{(5+h+2)^2}{(5+h-5)(5+h+2)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(7+h)^2}{h(7+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{7+h}{h} = \frac{7}{\lim\limits_{h\to 0} h} \to \infty \to Polstelle$$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ x\to(-2+h)}} f(x) = \lim_{\substack{h\to 0\\ x\to(-2+h)}} \frac{(x+2)^2}{(x-5)(x+2)} = \lim_{h\to 0}\frac{(-2+h+2)^2}{(-2+h-5)(-2+h+2)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h^2}{(h-7)h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h-7} \to 0 \to \text{Lücke } L(-2\mid 0)$$

4.) **Rekonstruktion gebrochen-rationaler Funktionen (Grundstruktur)**

Bilden Sie eine gebrochen-rationale Funktion mit folgenden Eigenschaften:

a) Polstelle (einfach) bei x = 5 und Nullstelle bei x = 1.

b) Polstelle (doppelt) bei x = k, dreifache Nullstelle bei x = 4 und einfache Nullstelle bei x = 8

c) Drei Nullstellen bei $x \in \{-3;-1;5\}$, eine Lücke und $D = \Re\setminus\{2;6;9\}$

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x-5}$

b) $f(x) = \dfrac{(x-4)^3(x-8)}{(x-k)^3}$

c) $f(x) = \dfrac{(x+3)(x+1)(x-5)(x-2)^k}{(x-2)(x-6)(x-9)}$ $\quad mit\ k=\{k\mid k\in N \wedge k\geq 1\}$

5.) **Zuordnung:** Ordnen Sie die gegebenen Funktionsvorschriften den Graphen zu:

A $f(x) = \dfrac{x-4}{x+1}$ **B** $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-5}$ **C** $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x^3-16}$

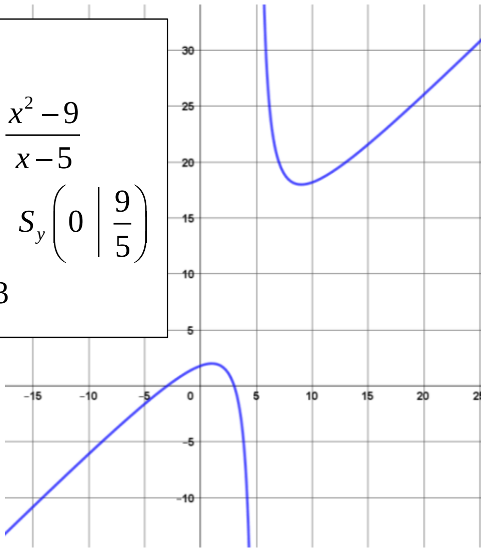
D $f(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$ **E** $f(x) = \dfrac{2x-4}{x^2-4}$ **F** $f(x) = \dfrac{x-6}{x+2}$

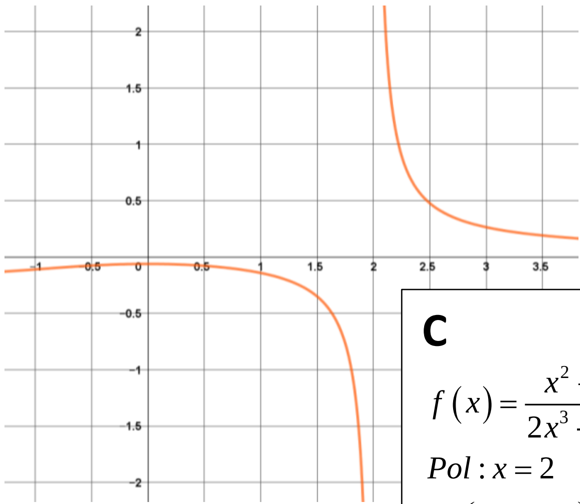
B

$f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-5}$

$Pol: x=5 \quad S_y\left(0 \,\middle|\, \dfrac{9}{5}\right)$

$NS: x=\pm 3$





C

$f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x^3-16}$

$Pol: x=2 \quad NS: keine$

$S_y\left(0 \,\middle|\, -\dfrac{1}{16}\right)$

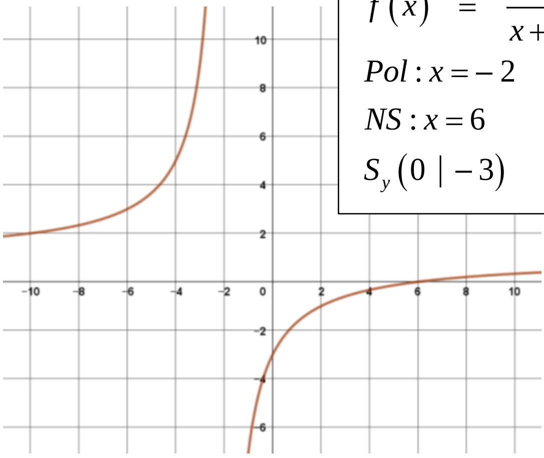
F

$$f(x) = \frac{x-6}{x+2}$$

$Pol: x = -2$

$NS: x = 6$

$S_y(0 \mid -3)$



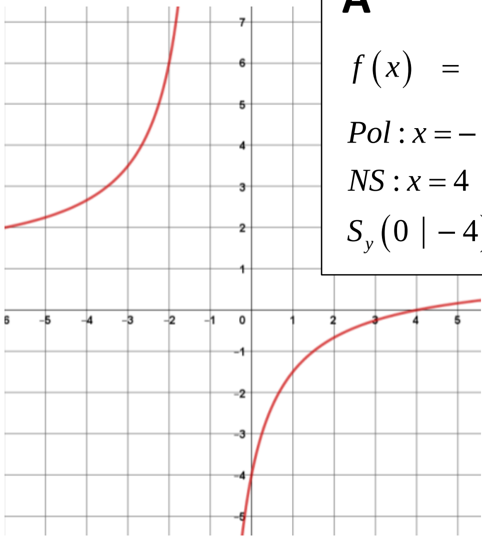
A

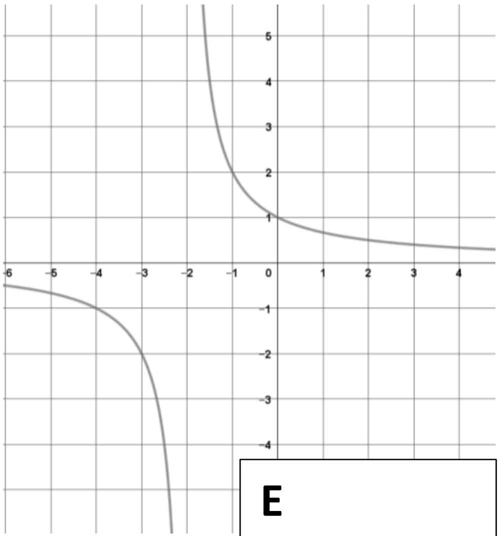
$$f(x) = \frac{x-4}{x+1}$$

$Pol: x = -1$

$NS: x = 4$

$S_y(0 \mid -4)$





E

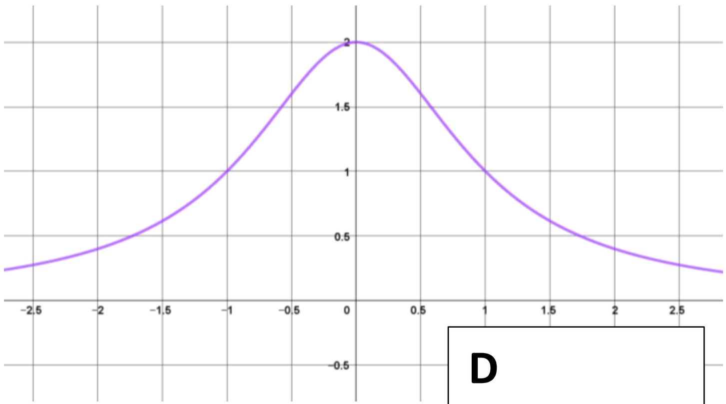
$$f(x) = \frac{2x-4}{x^2-4}$$

$Pol: x = -2$

$NS: keine$

$S_y(0 \mid 1)$

$L\left(2 \,\middle|\, \frac{1}{2}\right)$



D

$$f(x) = \frac{2}{x^2+1}$$

$Pol: keiner$

$NS: keine$

$S_y(0 \mid 2)$