11. Jgst.	9. Test	Datum: 20.05.2022
Klasse: GY 21b	Fach: Mathematik (Kernfach)	

Thema: Ableitungen; Kurvenuntersuchung ganzrat. Fkt.

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

1.) Nullstellen berechnen | 8 | |

Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktionen

a) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = 0$$

$$Horner-Schema:$$

$$\left.\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline x=1 & & 1 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right\} \quad x_1 = 0 \quad und \quad x^2 - 1 = 0$$

$$Nullstellen: \quad x = \{-1;1\} \quad dabei\ x = 1\,[doppelt]$$

b) $g(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$

$$g(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1 = 0 \xrightarrow[u=x^2]{Substitution} 2u^2 - 4u + 1 = 0$$

$$\to \quad u_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$$

$$\to \quad x = \pm\sqrt{\frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}} \quad \to \quad 4\ Nullstellen$$

2.) Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler (Universität Leipzig)

36	

a) Untersuchen Sie folgende Funktion auf Symmetrie, Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte und Monotonie-Intervalle.

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 + x^2$$

Symmetrie: keine $f(-x) \neq f(x) \ und \ \neq -f(x)$

Nullstellen:

$$f(x) = x^2\left(\frac{1}{6}x+1\right) = 0 \rightarrow x_1 = 0\,[doppelt] \quad und \quad x_2 = -6$$

Extrema:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x = 0 \rightarrow \left(\frac{1}{2}x+2\right)x = 0$$

$$\rightarrow x_1 = 0 \quad und \quad x_2 = -4$$

$$f''(x) = x+2 \rightarrow f''(0) = 2 > 0 \rightarrow TP(0 \mid 0)$$

$$und \rightarrow f''(-4) = -6 < 0 \rightarrow HP\left(-4 \,\middle|\, \frac{16}{3}\right)$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = x+2 = 0 \rightarrow x = -2$$

$$f'''(x) = 1 \rightarrow f'''(-2) = 1 > 0 \rightarrow WP\left(-2 \,\middle|\, \frac{8}{3}\right)$$

Monotonie-Intervalle:

$$I_1 = \left]-\infty; -4\right[\quad streng\ monoton\ steigend$$

$$I_2 = \left]-4; 0\right[\quad streng\ monoton\ fallend$$

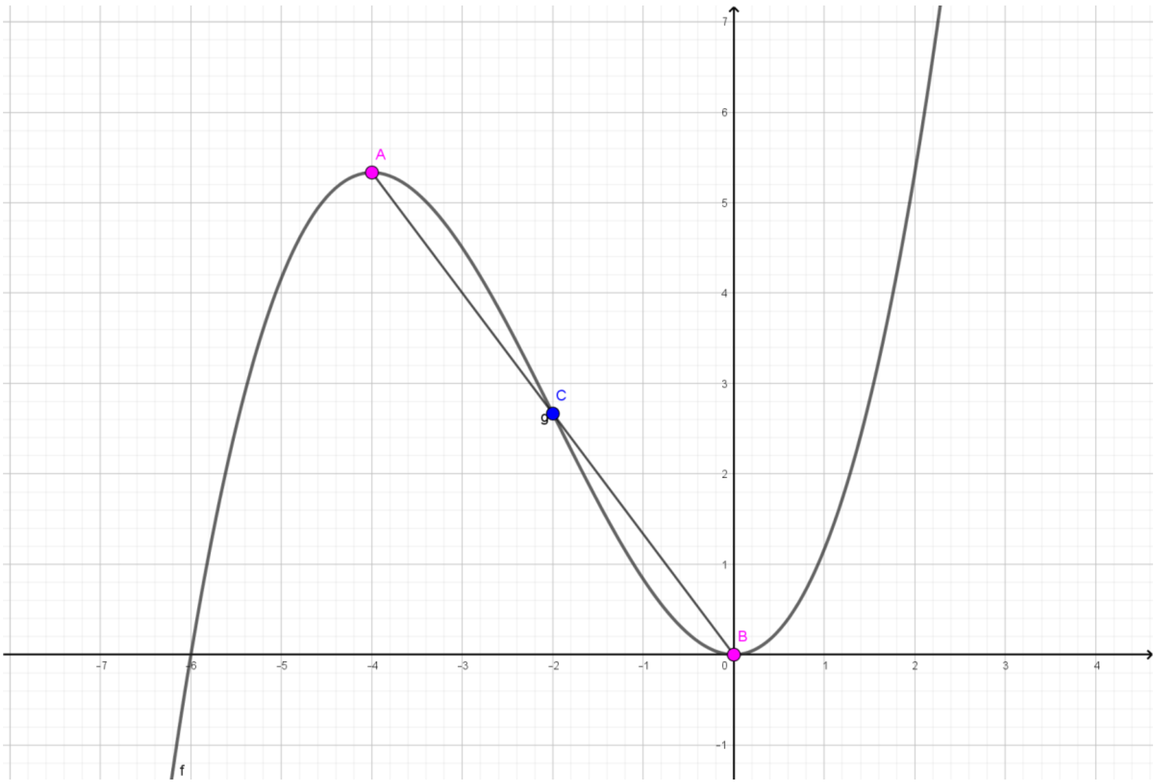
$$I_3 = \left]0; \infty\right[\quad streng\ monoton\ steigend$$

b) Zeigen Sie, dass der WP in der Mitte der Verbindungslinie zwischen HP und TP liegt und berechnen Sie den Abstand zwischen den beiden Extrema.

$$\left.\begin{aligned} x_m &= \frac{x_{TP}+x_{HP}}{2} \rightarrow x_m = \frac{0+(-4)}{2} = -2 \\ y_m &= \frac{y_{TP}+y_{HP}}{2} \rightarrow y_m = \frac{0+\frac{16}{3}}{2} = \frac{8}{3} \end{aligned}\right\} \quad W\left(-2 \,\middle|\, \frac{8}{3}\right)$$

Länge der Strecke:

$$e = \sqrt{\left[0-(-4)\right]^2+\left(0-\frac{16}{3}\right)^2} = \sqrt{16+\frac{256}{9}} = \sqrt{\frac{400}{9}} = \frac{20}{3}$$



c) Was ist ein Terrassenpunkt?
(Erklärung mittels math. Bedingungen und Skizze)

Unter einem Terrassen- oder Sattelpunkt versteht man einen Wendepunkt mit der Steigung m = 0.

3 *Bedingungen*:

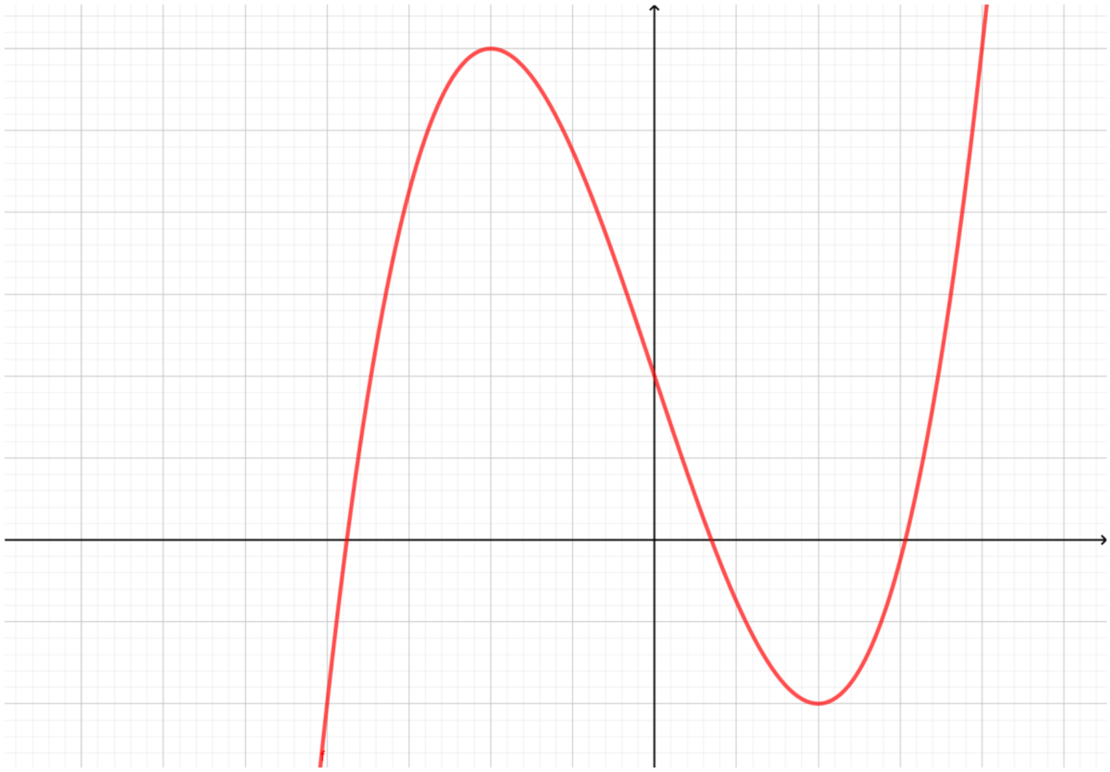
$$f'(x) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x) = 0 \quad \text{und} \quad f'''(x) \neq 0$$

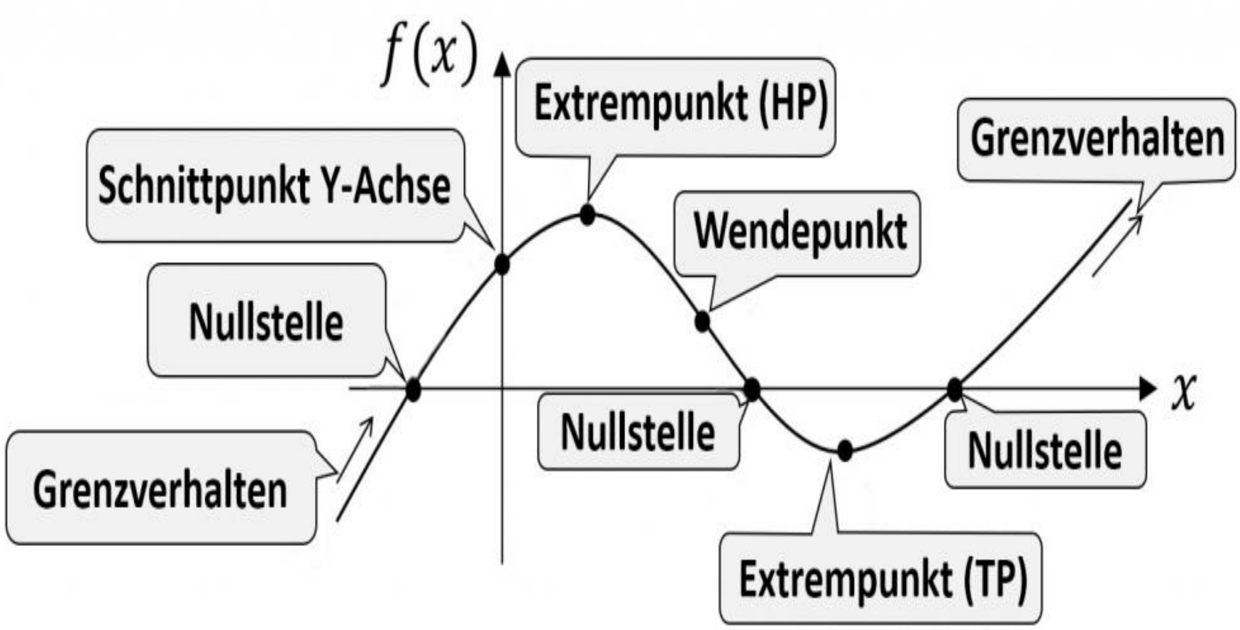
16

3.) Wissen und Begründen

a) Ordnen Sie die Begriffe den betreffenden Stellen bzw. Punkten des Graphen der Funktion zu (***Markieren Sie deutlich und nachvollziehbar***).

A	**Schnittpunkt mit y-Achse**	**B**	**Nullstelle**
C	**Extrempunkt (HP)**	**D**	**Extrempunkt (TP)**
E	**Wendepunkt**	**F**	**Rechtskrümmung**
G	**Linkskrümmung**		





b) Wie lautet die notwendige Bedingung für ein Extremum?
Bitte begründen Sie Ihre Aussage.

$$f'(x) \quad = \quad 0 \quad = \quad m \quad [\text{Steigung muss den Wert 0 besitzen.}]$$

---

c) Nennen Sie nun noch geschwind die beiden Kriterien für einen Wendepunkt?
Wie wird diese Bedingung bezeichnet?

$$2\ Kriterien: \quad hinreichende\ Bedingung$$

$$\rightarrow \quad f''(x) = 0 \quad und \quad f'''(x) \neq 0$$

---

d) Warum kann eine Funktion 2.Grades nie einen Wendepunkt besitzen?

Eine Funktion 2. Grades kann keinen WP besitzen, da das notwendige Kriterium

$\rightarrow \quad f''(x) = 0$ **nie erfüllt werden kann.**

$$\rightarrow \quad f(x) = ax^2 + bx + c \quad mit\ a \in \Re \setminus \{0\}$$

$$\rightarrow \quad f'(x) = 2ax + b \quad \rightarrow \quad f''(x) = 2a \quad \neq \quad 0$$