12. Jgst.	1. Kursarbeit	Datum: 06.10.2023
Kurs 12/1	Fach: Mathematik (Leistungsfach)	

Thema: **Ableitungsregeln; Summenzeichen**
Kurvenscharen ganzrat. Fkt.

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Aufgabe 1: **Kurvendiskussion Scharkurve (ganzrational)** **40**

Gegeben sei die Funktion $g_a(x) = \frac{4}{3}x^3 - ax^2 \quad mit\ a > 0$

a) Berechnen Sie die **Nullstellen, Extrema und Wendepunkte** und führen Sie vollständige Nachweise durch.

b) Geben Sie die Monotonieintervalle und das entsprechende Verhalten an.

c) Zeigen und begründen Sie, dass die Scharkurven für verschiedene Werte von a immer genau nur einen gemeinsamen Punkt besitzen und bestimmen Sie diesen.

d) Wie lautet die Tangentengleichung der Funktion $g_{a=2}(x)$ **an der Stelle x = 3**?

e) Für welchen Wert von a besitzt die Funktion einen Wendepunkt **an der Stelle x = 0,5**?

Für die nachfolgenden Fragestellungen seien folgende Werte angegeben, die nicht mit Ihren zuvor ermittelten Werten/Ergebnissen übereinstimmen müssen:

$$HP(0 \mid 0) \qquad TP\left(a \,\middle|\, -\frac{1}{6}a^3\right) \qquad WP(??? \mid ???)$$

f) Ermitteln Sie den Abstand zwischen HP und TP.

g) Der Wendepunkt soll in der Mitte zwischen HP und TP liegen. Wie lauten die Koordinatenwerte?

Aufgabe 2: **Untersuchung Kurvenscharen** **7**

Gegeben sei die Funktion $f_k(x) = \frac{1}{4}x^2\left(x^2 - 4x + \frac{1}{2}k^2\right) \quad mit\ k > 0$

Für welchen Wertebereich von k besitzt die Funktion nur eine Extremwertstelle?
Wie lauten die Koordinaten des Extremums in diesem Fall?
Gehen Sie in diesem Zusammenhang auch speziell auf den Wert k = 3 als „Sonderfall“ ein.
Anmerkung: Es genügt dabei das notwendige Kriterium heranzuziehen.

Aufgabe 3: **Ortskurve** **6**

Die lokalen Extrempunkte einer Kurvenschar haben die Koordinaten $E\left(1+\sqrt{a} \mid 2+a\right)$

Berechnen Sie die Gleichung der Ortskurve der Extrempunkte.

Aufgabe 4: **Ableitungen** | 14 | |

Bilden Sie zu den folgenden Funktionen jeweils die erste Ableitung und vereinfachen Sie den Term dann so weit wie möglich bzw. sinnvoll:

a) $f(x) = \sum_{k=0}^{5} \frac{1}{k^2+1} \cdot x^k$

b) $f_k(x) = \frac{kx^3 + x^5}{x^k}$

c) $f_x(k) = \frac{1}{2}k^4x^{n+1} - k^2x^n$

d) $f_k(x) = \frac{1}{2}k^4x^{n+1} - k^2x^n$

Aufgabe 5: **Summenzeichen** | 16 | |

Bestimmen Sie die ersten drei und den letzten Summanden und ermitteln Sie die Summe.

a) $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2}k^2 - 4k =$

b) $\sum_{k=21}^{1000} (-1)^{2k+1} =$

Schreiben Sie die Summe mit Hilfe des Summenzeichens

c) $2 - 4 + 6 - 8 + ... + 96 - 98 + 100 =$

Aufgabe 6: **Fontänen** | 27 | |

Der Verlauf von Fontänen eines Springbrunnens können annähernd durch die Funktionenschar $f_k(x)$ veranschaulicht werden, wobei k vom Wasserdruck abhängt:

$$f_k(x) = -\frac{3}{4}kx^2 + 6x \quad mit\ k > 0$$

a) Oh je – auf der Achse fehlen die Einheiten. Ermitteln Sie aufgrund der gegebenen Graphen die Lage der Einheiten auf der x-Achse und tragen Sie diese ein.

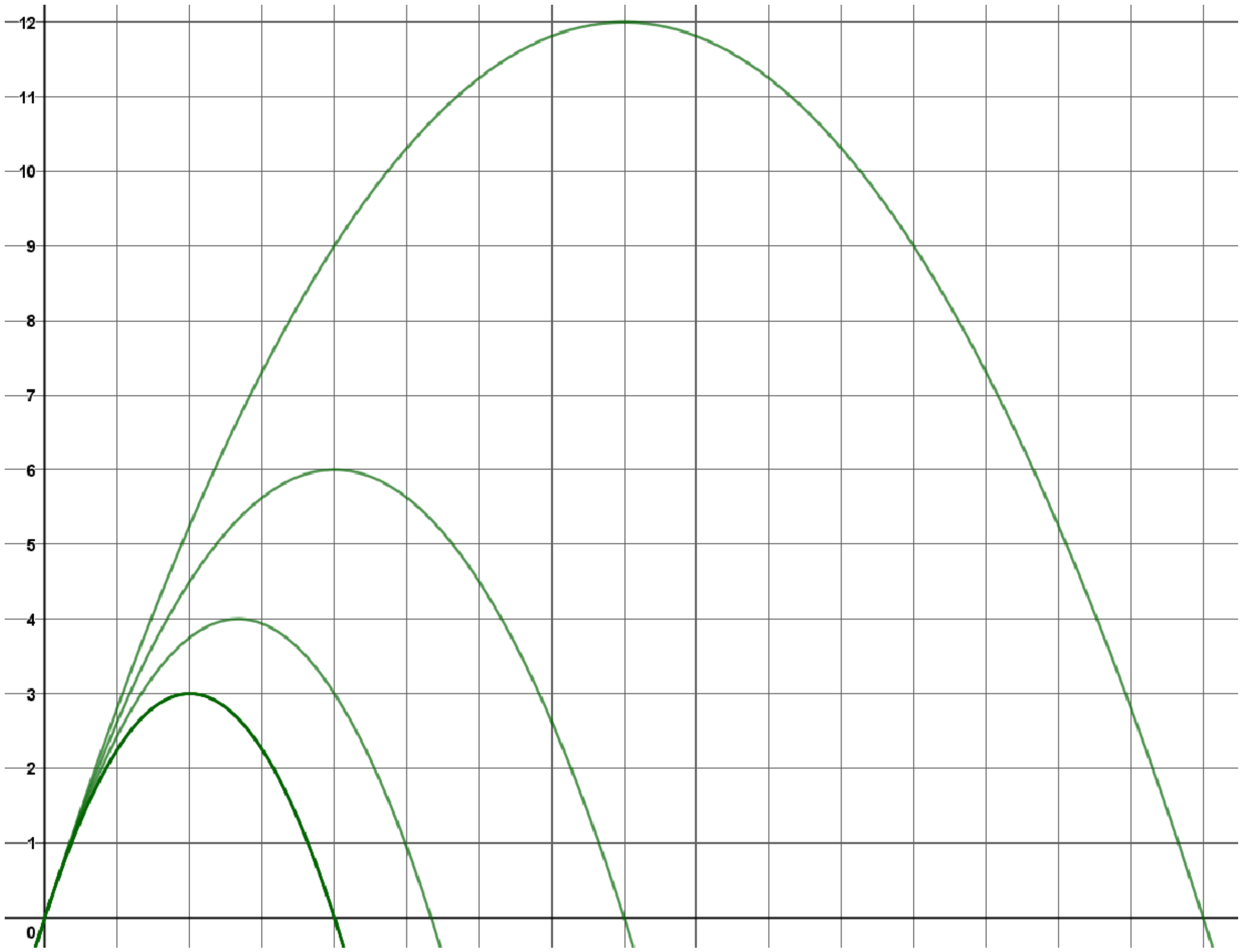
b) Für welchen Wasserdruck (= k-Werte) sind die Fontänen dargestellt?

c) In welchem Winkel wird das Wasser der Fontänen ausgestoßen?

d) Entlang welcher Kurve bewegen sich die Scheitelpunkte der Fontäne, wenn der Druck allmählich erhöht wird?

e) In welchem Intervall liegen die Werte des Parameters k, wenn sich die Höhen der Fontänen zwischen 2 m und 8 m befinden sollen?

Anlage: **Graph zu Aufgabe 6**



Zusatzaufgabe:

Die Bearbeitung dieser Aufgabe ist freiwillig;
Punkte gehen dann zusätzlich als Bonuspunkte in die Bewertung ein.

Gegeben sei die Funktion $h(x) = x^3 + bx^2 + cx + d \quad mit\ b, c, d \in \Re$

6	

Welche Beziehung muss zwischen b und c bestehen, damit die Funktion h(x) genau einen Sattelpunkt besitzt.

Anlage:

1.) Summe der ersten n Zahlen: $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

2.) Summe der ersten n Quadratzahlen: $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$