12. Jgst.	1. Test	Datum: 22.09.2023
Kurs M LK 1	Fach: Mathematik (Leistungsfach)	

Thema: **Summenzeichen; Ganzrat. Kurvenscharen; Ortskurve; Ableitungen**

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Aufgabe 1: **Summenzeichen** **16**

Bestimmen Sie die ersten drei und den letzten Summanden
und ermitteln Sie die Summe.

a)

$$\sum_{k=1}^{10} 2k^3 - k^2 = 1+12+45+\ldots+1.900 = 2\sum_{k=1}^{10} k^3 - \sum_{k=1}^{10} k^2 = 2\cdot\frac{100\cdot 121}{4} - \frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{10} 2k^3 - k^2 = \frac{100\cdot 121}{2} - 5\cdot 11\cdot 7 = 6.050 - 385 = 5.665$$

b) $$\sum_{k=1}^{1000} (-1)^{2k} = 1+1+1+\ldots+1 = 1.000$$

Schreiben Sie die Summen mit Hilfe des Summenzeichens

c) $$1+4+9+16+\ldots+100+121+144 = \sum_{k=1}^{12} k^2$$

d) $$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{512}-\frac{1}{1.024} = \sum_{k=1}^{10} (-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{2^k}$$

6

Zusatzaufgabe: Bestimmen Sie den Summenwert:

$$\sum_{k=21}^{100} 4k = 4\sum_{k=1}^{100} k - 4\sum_{k=1}^{20} k = 4\left[\sum_{k=1}^{100} k - \sum_{k=1}^{20} k\right] = 4\left[\frac{100\cdot 101}{2} - \frac{20\cdot 21}{2}\right]$$

$$\sum_{k=21}^{100} 4k = 2\cdot(10.100 - 420) = 19.360$$

Aufgabe 2: **Ableitungen**

Bestimmen Sie jeweils die **erste Ableitung** zu folgenden Funktionen und vereinfachen Sie so weit wie möglich, so dass nur positive Exponenten resultieren.

12 |

a) $f_k(x)=\frac{1}{2}k^4x^n$ $\qquad f_k'(x)=\frac{1}{2}\cdot n\cdot k^4x^{n-1}$

b) $f_k(x)=\frac{x^3-x^2k^2}{x}=x^2-xk^2$ $\qquad f_k'(x)=2x-k^2$

c) $f_k(x)=\frac{k^2}{x^n}=k^2\cdot x^{-n}$ $\qquad f_k'(x)=(-n)\cdot k^2\cdot x^{-n-1}=\frac{(-n)\cdot k^2}{x^{n+1}}$

d) $f_x(k)=\frac{k^2}{x^n}$ $\qquad f_x'(k)=\frac{2k}{x^n}$

32 |

Aufgabe 3: **Kurvenuntersuchung**

Gegeben sei folgende Funktion: $f_k(x) \;=\; \frac{1}{3}x^3-(k+1)x \quad mit\ k>0$

a) Untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen.

$$f_k(x) \;=\; \frac{1}{3}x^3-(k+1)x \;=\; 0 \;\rightarrow\; \left[\frac{1}{3}x^2-(k+1)\right]x \;=\; 0$$

$$\rightarrow \quad x_1=0 \quad und \quad x=\pm\sqrt{3(k+1)}$$

b) Zeigen Sie, dass die Funktion immer genau zwei Extrema besitzt und bestimmen Sie die Extremwert**stellen**.

$$f_k'(x) \;=\; x^2-(k+1) \;=\; 0 \;\rightarrow\; x^2 \;=\; k+1 \;\rightarrow\; x \;=\; \pm\sqrt{k+1}$$

$$f_k''(x) \;=\; 2x \;\rightarrow\; f_k''\left(\sqrt{k+1}\right) \;=\; 2\cdot\sqrt{k+1}>0 \;\rightarrow\; TP\left(\sqrt{k+1} \mid y_1\right)$$

$$\rightarrow \quad HP\left(-\sqrt{k+1} \mid y_2=-y_1\right)$$

c) Bestimmen Sie die Ortskurve der Extrema.

$$f_k'(x) \;=\; x^2-(k+1) \;=\; 0 \;\rightarrow\; k \;=\; x^2-1 \xrightarrow{in\ f(x)}$$

$$f_{k=x^2-1}(x) \;=\; \frac{1}{3}x^3-\left[\left(x^2-1\right)+1\right]x \;=\; \frac{1}{3}x^3-x^3 \;=\; -\frac{2}{3}x^3 \;=\; o(x)$$

d) Berechnen Sie den Wendepunkt und begründen Sie, weshalb dieser die Strecke zwischen Hoch- und Tiefpunkt halbiert.

$$f_k''(x) \quad = \quad 2x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad und \quad f_k'''(x) \quad = \quad 2 \quad \rightarrow \quad W(0 \mid 0)$$

e) Wie lang ist die Strecke zwischen Hoch- und Tiefpunkt **für k = 3**?

$$f_{k=3}(x) \quad = \quad \frac{1}{3}x^3 - 4x \quad \rightarrow \quad f_{k=3}(2) \quad = \quad \frac{8}{3} - 8 \quad = \quad -\frac{16}{3}$$

$$\rightarrow \quad TP\left(2 \,\middle|\, -\frac{16}{3}\right) \quad \rightarrow \quad HP\left(-2 \,\middle|\, \frac{16}{3}\right)$$

Abstand: $e = \sqrt{4^2 + \frac{32^2}{3^2}} = \sqrt{4^2 + \frac{32^2}{3^2}} = \sqrt{16 + \frac{1.024}{9}} = \sqrt{\frac{1.168}{9}} \approx 11{,}392$

f) Für welchen Wert von k liegt das Minimum an der Stelle x = 4?

$$TP\left(\sqrt{k+1} \mid y_1\right) \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{k+1} \quad \xrightarrow{x=4} \quad 4 = \sqrt{k+1} \quad \rightarrow \quad 15 = k$$

Anlage:

1.) Summe der ersten n Zahlen: $\sum_{k=1}^{n} k \quad = \quad \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

2.) Summe der ersten n Quadratzahlen: $\sum_{k=1}^{n} k^2 \quad = \quad \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$

3.) Summe der ersten n^3 Zahlen $\sum_{k=1}^{n} k^3 \quad = \quad \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$