12. Jgst.	2. Test	Datum: 17.11.2023
Kurs M LK 1	Fach: Mathematik (Leistungsfach)	

Thema: **Gebrochen-rat. Kurvenuntersuchung; Ableitungen (Produkt-, Quotienten- & Kettenregel)**

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Aufgabe 1: **Ableitungen** **16**

Bilden Sie die 1. Ableitung zu folgenden Funktionen und vereinfachen Sie soweit wie möglich

a) $f(x) = \left(2x^k - x^2\right)^n$ $\quad f'(x) = n\left(2x^k - x^2\right)^{n-1} \cdot \left(2kx^{k-1} - 2x\right)$

b) $f(x) = \left(3x^2+2\right)\cdot\sqrt[3]{x^2} = \left(3x^2+2\right)\cdot x^{\frac{2}{3}} = 3x^{\frac{8}{3}} + 2x^{\frac{2}{3}}$

Option 1: $f'(x) = 6x\cdot x^{\frac{2}{3}} + \left(3x^2+2\right)\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 6\cdot x^{\frac{5}{3}} + 2x^{\frac{5}{3}} + \frac{4}{3}\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = 8\cdot\sqrt[3]{x^5} + \frac{4}{3\cdot\sqrt[3]{x}}$

Option 2: $f'(x) = 8\cdot x^{\frac{5}{3}} + \frac{4}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}} = 8\cdot x^{\frac{5}{3}} + \frac{4}{3\cdot x^{\frac{1}{3}}} = 8\cdot\sqrt[3]{x^5} + \frac{4}{3\cdot\sqrt[3]{x}}$

c) $f(x) = \frac{1}{\left(15x-3x^2\right)^2} = \left(15x-3x^2\right)^{-2}$

$f'(x) = (-2)\cdot\left(15x-3x^2\right)^{-3}\cdot(15-6x) = \frac{12x-30}{\left(15x-3x^2\right)^3}$

d) $f(x) = (3x+4)\cdot\sin(4x)$

$f'(x) = 3\cdot\sin(4x) + (3x+4)\cdot\cos(4x)\cdot 4 = 3\cdot\sin(4x) + (12x+16)\cdot\cos(4x)$

Aufgabe 2: **Kurvenuntersuchung I** **24**

Gegeben sei folgende Funktion: $g(x) = \frac{x^2}{4x^2+1}$

a) Ermitteln Sie den Definitionsbereich von g(x). [kurze Begründung]

Lösung: **Definitionsbereich ist D = R Erklärung: im Nenner gibt es keine Nullstelle.**

b) Überprüfen Sie den Graphen g(x) auf Symmetrieeigenschaft.

Lösung:

Funktion ist achsensymmetrisch, da gilt: $g(-x) = \frac{(-x)^2}{4(-x)^2+1} = \frac{x^2}{4x^2+1} = g(x)$

c) Bestimmen Sie die (waagrechte) Asymptote.

Lösung: **Da Zähler- und Nennergrad identisch n = 2 sind, genügt es die Koeffizienten a_2 und b_2 heran zu ziehen:** $a(x) = \frac{1}{4}$

d) Zeigen Sie, dass die Funktion g(x) genau ein Extremum besitzt.

⇨ ***notwendige Bedingung genügt***

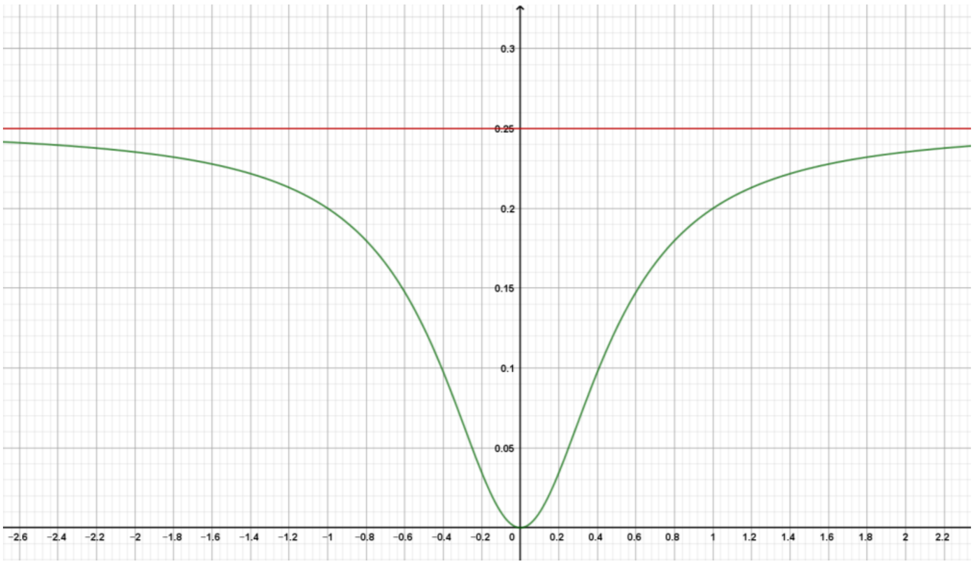
Lösung:

$$g'(x) = \frac{2x\cdot\left(4x^2+1\right)-x^2\cdot 8x}{\left(4x^2+1\right)^2} = \frac{8x^3+2x-8x^3}{\left(4x^2+1\right)^2} = \frac{2x}{\left(4x^2+1\right)^2}$$

$$\frac{2x}{\left(4x^2+1\right)^2} = 0 \xrightarrow{\cdot\,Nenner} x=0$$

e) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion und die Asymptote. 😉

Lösung: **doppelte Nullstelle bei x = 0 => Extremum; Keine Polstellen / Lücken**
Achsensymmetrie und Asymptote bei a(x) = 0,25



Aufgabe 3: **Kurvenuntersuchung II**

10

Gegeben seien die **beiden Funktionen**

$$m(x) = \frac{(2x+8)\cdot(x-3)}{x^2-6x+9} \quad und \quad k(x) = \frac{(2x+8)\cdot(x+3)}{x^2-9}$$

*Untersuchen Sie die **beiden Funktionen** hinsichtlich ihrer Zähler- und Nennernullstellen und bestimmen Sie die Art der vorliegenden Unstetigkeitsstellen.*

Lösung:

$$m(x) = \frac{(2x+8)\cdot(x-3)}{x^2-6x+9} \quad und \quad k(x) = \frac{(2x+8)\cdot(x+3)}{x^2-9}$$

Zähler	*Nenner*
$2x+8=0$	$x^2-6x+9=0$
$x=-4$	$(x-3)^2=0$
	$x=3\,[doppelt]$
$x-3=0$	
$x=3$	

Zähler	*Nenner*
$2x+8=0$	$x^2-9=0$
$x=-4$	$x=3$
	$x=-3$
$x+3=0$	
$x=-3$	

$$m(x) = \frac{(2x+8)\cdot(x-3)}{x^2-6x+9} \qquad und \qquad k(x) = \frac{(2x+8)\cdot(x+3)}{x^2-9}$$

$m(x)^* = \frac{2x+8}{x-3}$	$k(x)^* = \frac{2x+8}{x-3}$
$NS: \quad x = -4$	$NS: \quad x = -4$
$Lücke: \quad keine$	$Lücke: \quad x = -3 \quad L\left(-3 \mid -\frac{1}{3}\right)$
$Pol: \quad x = 3\,[mVZW]$	$Pol: \quad x = 3\,[mVZW]$

<u>ZUSATZAUFGABE:</u> Wählen Sie nun eine der beiden folgenden Teilaufgaben aus

Option 1: Analysieren Sie das links- und rechtsseitige Grenzwertverhalten **der Funktionen m(x)** an der Stelle x = 3

4	

Lösung:

$$m(x) = \frac{(2x+8)\cdot(x-3)}{x^2-6x+9} \rightarrow m(x)^* = \frac{2x+8}{x-3}$$

$$\lim_{\substack{x\to 3+h\\ h\to 0}} m(x)^* = \lim_{\substack{x\to 3+h\\ h\to 0}} \frac{2x+8}{x-3} = \lim_{h\to 0} \frac{2(3+h)+8}{3+h-3} = \lim_{h\to 0} \frac{14+2h}{h} \rightarrow \left[\frac{14}{0}\right] \rightarrow \infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 3-h\\ h\to 0}} m(x)^* = \lim_{\substack{x\to 3-h\\ h\to 0}} \frac{2x+8}{x-3} = \lim_{h\to 0} \frac{2(3-h)+8}{3-h-3} = \lim_{h\to 0} \frac{14-2h}{-h} \rightarrow \left[\frac{14}{-0}\right] \rightarrow -\infty$$

Option 2: Ab welchen Werten ist der Abstand **der Funktion k(x)** zu ihrer waagrechten Asymptote kleiner als $\varepsilon = 0{,}001$?

4	

Lösung:

$$k(x) = \frac{(2x+8)\cdot(x+3)}{x^2-9} \rightarrow k(x)^* = \frac{2x+8}{x-3}$$

$Ansatz:$

$$0{,}001 > k(x)^* - a(x) \rightarrow 0{,}001 > \frac{2x+8}{x-3} - 2 \xrightarrow{\cdot(x-3)} 0{,}001x - 0{,}003 > 2x+8-2x+6$$

$$\rightarrow 0{,}001x - 0{,}003 > 14 \xrightarrow{+0{,}003} 0{,}001x > 14{,}003 \xrightarrow{\cdot 1.000} x > 14.003$$