12. Jgst.	**4. Test**	**Datum: 12.01.2024**
Kurs M LK 1/2	**Fach: Mathematik (Leistungsfach)**	

Thema: Extremwertaufgaben; Ableitungen (Produkt-, Quotienten- & Kettenregel)

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Aufgabe 1: Ableitungen | **14** |

Bilden Sie die 1. Ableitung zu folgenden Funktionen.

a) $f(x) = \left(4x^3 - 2x + 1\right)^{100}$ b) $f(x) = \sin^3\left(x^{n+1}\right)$

c) $f_k(x) = \left(x^k - 4\right)\cdot\left(x^{3k} - 5x^{2k}\right)$ d) $f(x) = \sqrt[5]{x^{2n}}$

Lösung:

a) $f'(x) = 100\cdot\left(4x^3 - 2x + 1\right)^{99}\cdot\left(12x^2 - 2\right)$

b) $f'(x) = 3\cdot\sin^2\left(x^{n+1}\right)\cdot\cos\left(x^{n+1}\right)\cdot(n+1)\cdot x^n$

c) $f_k'(x) = k\cdot x^{k-1}\cdot\left(x^{3k} - 5x^{2k}\right) + \left(x^k - 4\right)\cdot\left(3k\cdot x^{3k-1} - 10k\cdot x^{2k-1}\right)$

d)

$$f(x) = \sqrt[5]{x^{2n}} = x^{\frac{2n}{5}} = x^{0,4n}$$

$$f'(x) = 0,4n\cdot x^{0,4n-1} = \frac{2n}{5}\cdot x^{\frac{2n}{5}-1} = \frac{2n}{5}\cdot x^{\frac{2n-5}{5}} = \frac{2n}{5}\cdot\sqrt[5]{x^{2n-5}}$$

Aufgabe 2: Extremwertaufgaben | **24** |

Bitte bearbeiten Sie 3 von 4 Aufgaben.

Teil 1: Der Ausdruck **5x + 10y** zweier Zahlen beträgt **120**.
Bestimmen Sie die beiden Zahlen, so dass das Produkt aus $x \text{ und } y^2$ maximal wird.

Lösung:

$$\text{Zielfunktion}: \quad p(x,y) = x\cdot y^2$$

$$\text{Nebenbedingung}: \quad 5x + 10y = 120 \rightarrow x = 24 - 2y$$

$$\xrightarrow[\text{in ZF einsetzen}]{NB\ x=24-2y} p(x,y) = (24-2y)\cdot y^2 = 24y^2 - 2y^3 = p(y)$$

$$\rightarrow p'(y) = 48y - 6y^2 = 0 \rightarrow y_1 = 0 \quad oder \quad y_2 = 8$$

$$\rightarrow y = 0 \rightarrow x = 24 \quad oder \quad y = 8 \rightarrow x = 8$$

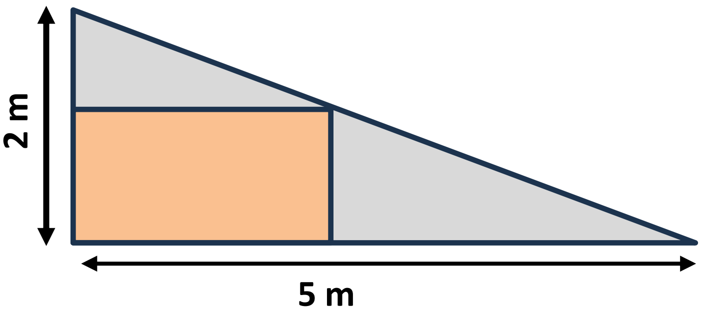
$$\rightarrow p''(y) = 48 - 12y$$

$$\rightarrow p''(0) = 48 > 0 \rightarrow Min \quad und \quad p''(8) = -48 < 0 \rightarrow Max$$

$$\text{Zielfunktion}: \quad p(8/8) = 8\cdot 64 = 512$$

Teil 2:

In einem Nebenraum eines Dachbodens soll wie in der Skizze angegeben, ein Lüftungsschacht einer Heizanlage eingebaut werden.
Wie sind Länge und Höhe des Schachtes zu wählen, damit das Durchflussvolumen auf Basis der **Querschnittsfläche maximal** wird?
Welchen Wert beträgt das Flächenmaximum?



Lösung:

$$\mathit{Zielfunktion}: \quad A(x,y) = x \cdot y$$

$$\mathit{Nebenbedingung}: \quad g(x) = 2 - \frac{2}{5}x \rightarrow y = 2 - \frac{2}{5}x$$

$$\xrightarrow[\text{in ZF einsetzen}]{NB\ y=2-\frac{2}{5}x} A(x,y) = x \cdot \left(2 - \frac{2}{5}x\right) = 2x - \frac{2}{5}x^2 = A(x)$$

$$\rightarrow A'(x) = 2 - \frac{4}{5}x = 0 \rightarrow x = \frac{5}{2} = 2{,}5 \rightarrow y = 1$$

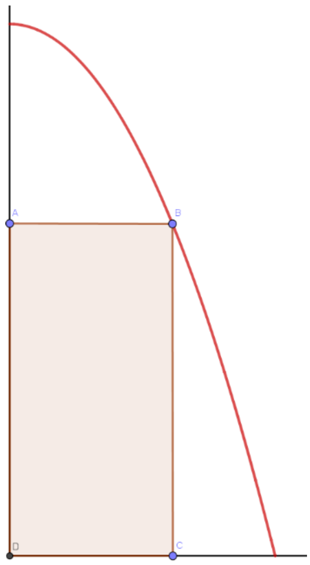
$$\rightarrow A''(x) = -\frac{4}{5} < 0 \rightarrow Max \rightarrow \mathit{Zielfunktion}: A\left(\frac{5}{2}/1\right) = \frac{5}{2} \cdot 1 = \frac{5}{2} = 2{,}5\left[m^2\right]$$

Teil 3:

Der Graph der Funktion $f(x) = 4 - x^2$ und die Abszisse schließen eine Fläche ein. In diese Fläche wird ein Rechteck so gelegt, dass die Rechteckseiten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen.

Berechnen Sie die Koordinaten desjenigen Rechtecks, dessen **Umfang maximal** ist,

und geben Sie den maximalen Umfang an.



Lösung:

$$\mathit{Zielfunktion}: \quad U(x,y) = 2x + 2y$$

$$\mathit{Nebenbedingung}: \quad f(x) = 4 - x^2 \rightarrow y = 4 - x^2$$

$$\xrightarrow[\text{in ZF einsetzen}]{NB\ y=4-x^2} U(x,y) = 2x + 2\left(4 - x^2\right) = 8 + 2x - 2x^2 = U(x)$$

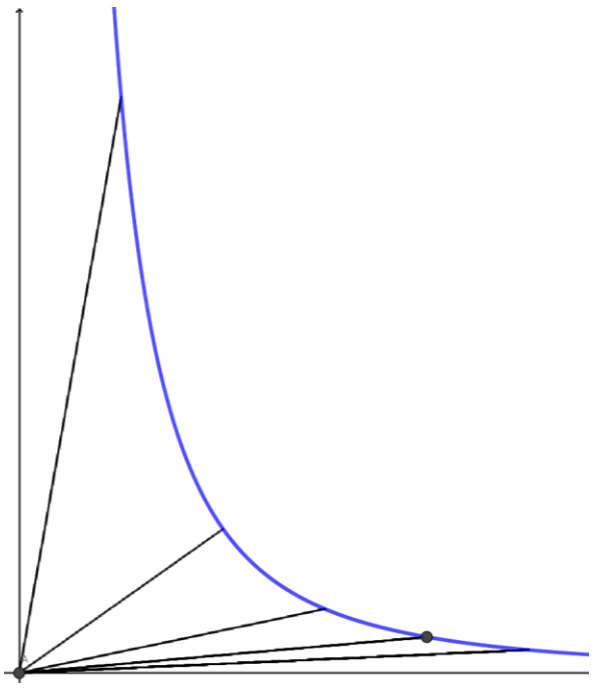
$$\rightarrow U'(x) = 2 - 4x = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow y = 4 - (0{,}5)^2 = 3{,}75$$

$$\rightarrow U''(x) = -4 < 0 \rightarrow Max$$

$$\rightarrow \mathit{Zielfunktion}: U\left(\frac{1}{2}/3{,}75\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 3{,}75 = 8{,}5[m]$$

⇨ Lösung mit Geogebra

Teil 4:



Welche Punkte der Hyperbel $f(x) = \frac{4\sqrt{2}}{x^2}$

haben die **geringste Entfernung vom Ursprung** des Koordinatensystems.

Bestimmen Sie auch den Wert des gesuchten Abstands.

Anmerkung:
Die Rechnung kann vereinfacht werden, wenn das Quadrat der Entfernung untersucht wird 😉

Lösung:

$$Zielfunktion: \quad e(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} \xrightarrow{quadriert} e^2(x,y) = x^2 + y^2$$

$$Nebenbedingung: \quad f(x) = \frac{4\sqrt{2}}{x^2} = \frac{\sqrt{32}}{x^2} \rightarrow y = \frac{\sqrt{32}}{x^2}$$

$$\xrightarrow[in\ ZF\ einsetzen]{NB\ y=\frac{\sqrt{32}}{x^2}} e^2(x,y) = x^2 + \left(\frac{\sqrt{32}}{x^2}\right)^2 = x^2 + \frac{32}{x^4} = e^2(x)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dx}\left[e^2(x)\right] = 2x - \frac{128}{x^5} = 0 \rightarrow x^6 = 64 \rightarrow |x| = 2 \rightarrow y =$$

$$\rightarrow \frac{d^2}{dxdx}\left[e^2(x)\right] = 2 - \frac{640}{x^6} > 0 \rightarrow Min$$

$$\rightarrow Zielfunktion: \quad e\left(2/\sqrt{2}\right) = \sqrt{2^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{6}$$

⇨ [Lösung mit Geogebra]

Aufgabe 4: **Aussagenprüfung zur Extremwertermittlung**

12	

Lösung:

Lea will mit einer Schnur der Länge $U = 4\ m$ ein Rechteck mit den Seitenlängen x und y mit einem möglichst großen Flächeninhalt A bilden. **a) Welcher Ansatz passt zu dieser Aufgabe?** **(i) U(x)=4 gesucht: Maximum von U = 2x+2y** **(ii) U(x)=2x+y gesucht: Maximum von A = x·y** **(iii) 4=2x+2y gesucht: Maximum von U = 2x+2y** **(iv) 4=2x+2y gesucht: Maximum von A = x·y** **b) Welche Funktion beschreibt das Problem?** **A:** $f(x) = (4-2x):2x$ **B:** $f(x) = 4x - 2x^2$ **C:** $f(x) = 2x - x^2$ **D:** $f(x) = 2x - 2x^2$	**a) Richtig ist:** ☐ ☐ ☐ ☒ **b)** **A** ☐ **B** ☐ **C** ☒ **D** ☐
Der Umsatz eines Pizzaservice lässt sich für die letzten 20 Tage beschreiben durch U mit $U(t) = 0,1t^3 - 2,4t^2 + 300$ **(t in Tagen, U(t) in €).** **a) An welchem Tag war der Umsatz am geringsten?** **b) An welchem Tag war der Umsatzrückgang am größten?**	**Richtig ist:** **a)** ☐ **am 1. Tag** ☒ **am 16. Tag** ☐ **am 18. Tag** **b)** ☐ **am 7. Tag** ☒ **am 8. Tag** ☐ **am 10. Tag**

Erläuterung zur „Umsatzaufgabe“:

$$U(t) = 0,1t^3 - 2,4t^2 + 300$$

$$U'(t) = 0,3t^2 - 4,8t = 0 \quad \rightarrow \quad t = \frac{4,8}{0,3} = 16$$

$$U''(t) = 0,6t - 4,8 \quad \rightarrow \quad U''(16) = 0,6 \cdot 16 - 4,8 = 4,8 > 0 \quad \rightarrow \quad Min$$

$$U''(t) = 0,6t - 4,8 = 0 \quad \rightarrow \quad t = \frac{4,8}{0,6} = 8$$

$$U'''(t) = 0,6 \neq 0 \quad \rightarrow \quad WP$$