12. Jgst.	3. Kursarbeit	Datum: 23.02.2024
Kurs 12/1+2	Fach: Mathematik (Leistungsfach)	

Thema: **Extremwertaufgaben; Rekonstruktion; Integralrechnung**

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Name:	
Punkte:	Note:

Aufgabe 1: **Stammfunktionen bestimmen** **24**

Ermitteln Sie die **Menge der Stammfunktionen** zu folgenden Funktionen/Ausdrücken:

a) $f(x) = -4x^3 + 2x^2$

b) $\int (x-2)(2x+4)\,dx =$

c) $\int \frac{9}{x^4}\,dx$

d) $\int \sqrt[n]{x^5}\,dx$

e) $\int \left[\sin(x) - \cos(x)\right]\,dx$

f) $\int \left(t^2 - 2\right)^2\,dx =$

g) $\int \left(t^2 - 2\right)^2\,dt =$

h) $\int \frac{9x^6 - 4x^4 + 2}{x^2}\,dx$

Aufgabe 2: **Randfunktion und Abszisse I** **14**

Gegeben sei die Randfunktion $f_k(x) = -\frac{2}{k}x^3 + 2x^2 \quad mit\ k > 0$

a) Bestimmen Sie die Nullstellen, Extrema und Wendepunkte der Funktion.

b) Der y-Wert des Maximums beträgt $y_k(\max) = \frac{8}{27}k^2$

Ermitteln Sie die Ortskurve der Extrema.

Sei nun noch die Funktion $g(x) = x^2$ gegeben.

c) Wie groß ist die von f und g eingeschlossene Fläche in Abhängigkeit von k?

d) Begründen Sie, dass kein Wert für k existiert, bei dem die eingeschlossene Fläche minimal wird.

Aufgabe 3: **Randfunktion und Abszisse II** **8**

Gegeben sei die Randfunktion $f_k(x) = \frac{2}{k^2}x - \frac{2}{k^3}x^2 \quad mit\ k \neq 0$

Beweisen Sie, dass der Inhalt der von der Funktion mit der x-Achse eingeschlossenen Fläche unabhängig von k ist.

Aufgabe 4: **Fläche zwischen Funktionen I** 10

Der Graph einer Funktion $f(x) = \frac{1}{18}x^3$ wird vom einer Ursprungsgeraden mit positiver Steigung geschnitten.

Wie groß ist die Steigung, damit die umschlossene Fläche 18 FE beträgt?

Aufgabe 5: **Fläche zwischen Funktionen II** 10

Gegeben sei die Funktion $g(x) = \frac{1}{4}x^2$.

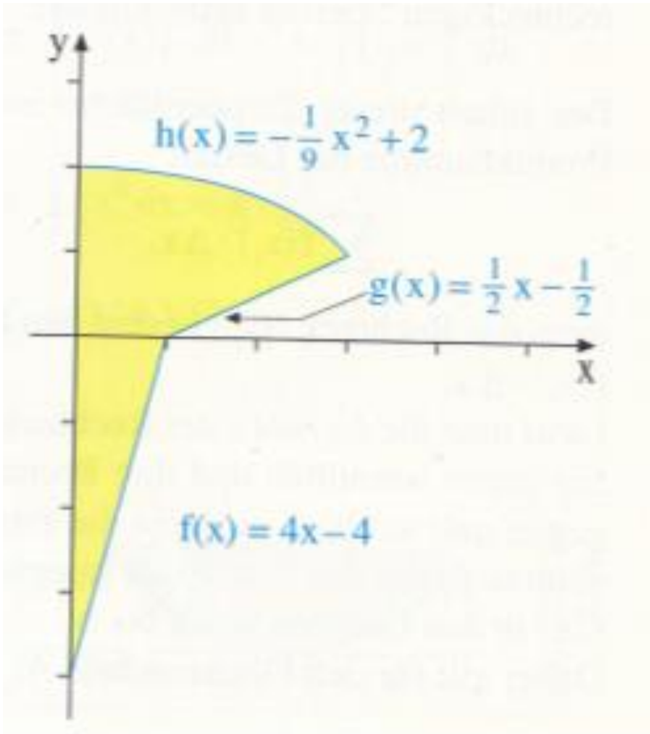
a) Bestimmen Sie die Fläche unter der Parabel mit der x-Achse im Intervall [0 ; 6].

b) Welche **Parallele zur y-Achse** halbiert die Fläche unter der Parabel im angegebenen Intervall?

Aufgabe 6: 12

Fläche zwischen Funktionen III

Berechnen Sie den Inhalt der abgebildeten gefärbten Fläche:



Aufgabe 7: **Integral** 10

Berechnen Sie den Wert des Integrals, fertigen Sie eine Skizze der Situation für k = 2 an und erläutern bzw. begründen Sie damit Ihr Ergebnis:

$$\int_{-k}^{2k} x \cdot (x - 2k)\ dx.$$

Aufgabe 8: **Grenzen ermitteln** | 10 | |

Wie muss der Parameter gewählt werden, damit eine korrekte Aussage entsteht?

a) $\int_{k}^{4} 4x^3 dx = 255$ b) $\int_{k}^{k^2} 2x dx = 12$

Oh je – hier kommen ja zwei Ergebnisse für die Parameter heraus.

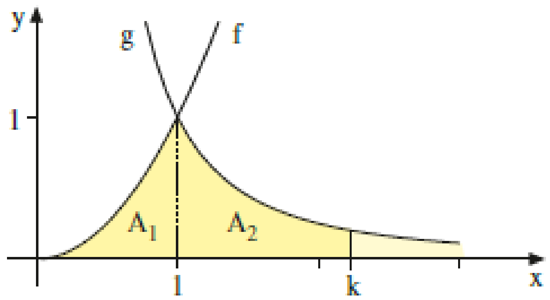
Begründen Sie, weshalb beide Lösungen korrekt sein können 😉

Aufgabe 9: **Uneigentliches Integral** | 12 | |

Ermitteln Sie den Inhalt der Gesamtfläche A ($A = A_1 + A_2$) mit der x-Achse, wenn sich der Graph der Funktion g(x) längs der positiven x-Achse ins Unendliche erstreckt.

Die Randfunktionen lauten

$$f(x) = x^2 \quad und \quad g(x) = \frac{1}{x^2}$$



Auswahl: ***Wählen Sie von den folgenden 4 Aufgaben (10 – 13) bitte zwei zur Bearbeitung aus!***

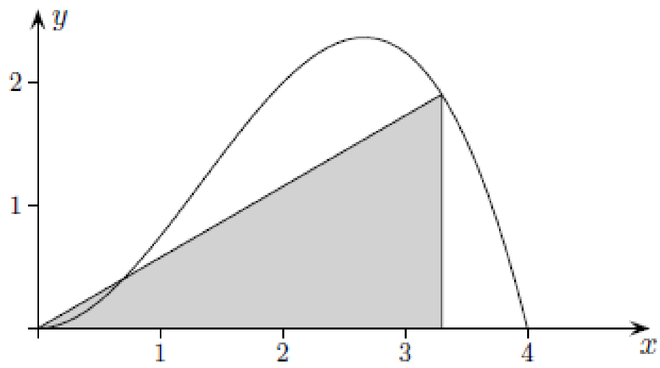
Aufgabe 10: **Extremwertaufgabe I** | 10 | |

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^2(4-x) \quad mit\ x \in [0;4]$

Für jedes u > 0 sind die Eckpunkte eines Dreiecks wie folgt festgelegt:

A (0 / 0) B (u / 0) C (u / f(u))

Bestimmen Sie den Wert für u nun so, dass dieses Dreieck maximalen Flächeninhalt hat.



Aufgabe 11: **Extremwertaufgabe II**

10	

Die Katheten eines Dreiecks sind zusammen 12 cm lang.
Wie groß sind die Katheten x und y zu wählen, damit das Quadrat F über der Hypotenuse z möglichst klein wird?

Welchen Wert besitzt die gesuchte Quadratfläche?

Aufgabe 12: **Rekonstruktion I**

10	

Eine ganzrationale Funktion 3. Grades ist punktsymmetrisch zum Ursprung, hat ein Maximum bei $x=\sqrt{3}$, eine weitere Nullstelle bei x = 3 und schließt im I. Quadranten mit der x-Achse eine Fläche mit dem Inhalt $A=\frac{9}{4}$ ein.

Bestimmen Sie die Funktionsvorschrift.

Aufgabe 13: **Rekonstruktion II**

10	

Eine ganzrationale hat folgende Eigenschaften:

1	$g(3)=0$	
2	$g'(3)=0$	
3	$g'(1)>0$	
4	$g''(4)>0$	
5	$\int_0^6 g(x)\,dx=0$	

Welche Bedeutung haben die jeweiligen Angaben für den Graphen?

Skizzieren Sie einen möglichen Graphen, auf den alle Angaben zutreffen im Intervall I = [0 ; 6].