12. Jgst.	3. Kursarbeit	Datum: 23.02.2024
Kurs 12/1+2	Fach: Mathematik (Leistungsfach)	

Thema: **Extremwertaufgaben; Rekonstruktion; Integralrechnung**

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Name:	
Punkte:	Note:

Aufgabe 1: **Stammfunktionen bestimmen** **24**

Ermitteln Sie die **Menge der Stammfunktionen** zu folgenden Funktionen/Ausdrücken:

a) $f(x) = -4x^3 + 2x^2 \qquad F(x) = -x^4 + \frac{2}{3}x^3 + c$

b) $\int (x-2)(2x+4)\,dx = \int 2x^2 - 8dx = \frac{2}{3}x^3 - 8x + c$

c) $\int \frac{9}{x^4}\,dx = \int 9x^{-4}dx = -3x^{-3} + c = -\frac{3}{x^3} + c$

d) $\int \sqrt[n]{x^5}\,dx = \int x^{\frac{5}{n}}dx = \frac{1}{\frac{5}{n}+1}x^{\frac{5}{n}+1} + c = \frac{n}{5+n}x^{\frac{5+n}{n}} + c$

e) $\int [\sin(x) - \cos(x)]\,dx = -\cos(x) - \sin(x) + c$

f) $\int (t^2-2)^2\,dx = \int (t^4 - 4t^2 + 4)\,dx = (t^4 - 4t^2 + 4)x + c$

g) $\int (t^2-2)^2\,dt = \int (t^4 - 4t^2 + 4)\,dt = \frac{1}{5}t^5 - \frac{4}{3}t^3 + 4t + c$

h)

$$\int \frac{9x^6 - 4x^4 + 2}{x^2}\,dx = \int \left(\frac{9x^6}{x^2} - \frac{4x^4}{x^2} + \frac{2}{x^2}\right)dx = \int \left(9x^4 - 4x^2 + 2x^{-2}\right)dx = \frac{9}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{2}{x} + c$$

Aufgabe 2: **Randfunktion und Abszisse I**

14	

Gegeben sei die Randfunktion $f_k(x) \; = \; -\frac{2}{k}x^3 + 2x^2 \quad mit\ k > 0$

a) Bestimmen Sie die Nullstellen, Extrema und Wendepunkte der Funktion.

b) Der y-Wert des Maximums beträgt $y_k(\max) \; = \; \frac{8}{27}k^2$

Ermitteln Sie die Ortskurve der Extrema.

Sei nun noch die Funktion $g(x) \; = \; x^2$ gegeben.

c) Wie groß ist die von f und g eingeschlossene Fläche in Abhängigkeit von k?

d) Begründen Sie, dass kein Wert für k existiert, bei dem die eingeschlossene Fläche minimal wird.

$$f_k(x) \; = \; -\frac{2}{k}x^3 + 2x^2 \quad mit\ k > 0$$

$$Nullstellen: \; \left(-\frac{2}{k}x + 2\right)x^2 \; = \; 0 \; \rightarrow \; x = 0\left[doppelt\right] \quad und \quad x = k$$

$$Extrema:$$

$$f_k'(x) \; = \; -\frac{6}{k}x^2 + 4x \; = \; 0 \; \rightarrow \; \left(-\frac{6}{k}x + 4\right)x \; = \; 0 \; \rightarrow \; x = 0 \quad und \quad x = \frac{2}{3}k$$

$$f_k''(x) \; = \; -\frac{12}{k}x + 4 \; \rightarrow \; f_k''(0) \; = \; 4 > 0 \; \rightarrow \; Min(0 \mid 0) \; \rightarrow \; Max\left(\frac{2}{3}k \;\middle|\; \frac{8}{27}k^2\right)$$

$$Ortskurve: \; Max\left(\frac{2}{3}k \;\middle|\; \frac{8}{27}k^2\right) \; \rightarrow \; k = \frac{3}{2}x \; \rightarrow \; y = \frac{8}{27}\cdot\left(\frac{3}{2}x\right)^2 = \frac{2}{3}\cdot x^2$$

$$Wendepunkte:$$

$$f_k''(x) \; = \; -\frac{12}{k}x + 4 \; = \; 0 \; \rightarrow \; x = \frac{1}{3}k$$

$$f_k'''(x) \; = \; -\frac{12}{k} \neq 0 \; \rightarrow \; W\left(\frac{1}{3}k \;\middle|\; \frac{4}{27}k^2\right)$$

$$f_k(x) \; = \; -\frac{2}{k}x^3 + 2x^2 \quad und \quad g(x) \; = \; x^2$$

$$Schnittstellen:$$

$$f_k(x) \; = \; g(x) \; \rightarrow \; -\frac{2}{k}x^3 + 2x^2 \; = \; x^2 \; \rightarrow \; \left(-\frac{2}{k}x + 1\right)x^2 \; = \; 0 \; \rightarrow \; x = 0 \quad und \quad x = \frac{1}{2}k$$

$$Fläche:$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}k}\left(-\frac{2}{k}x^3 + x^2\right)dx \; = \; \left[-\frac{1}{2k}x^4 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{2}k} \; = \; -\frac{1}{2k}\cdot\frac{1}{16}k^4 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}k^3 \; = \; -\frac{1}{32}k^3 + \frac{1}{24}k^3 \; = \; \frac{1}{96}k^3$$

$$h(k) \; = \; \frac{1}{96}k^3 \; \rightarrow \; h'(k) = \frac{1}{32}k^2 = 0 \; \rightarrow \; k = 0\left[doppelt\right] \; \rightarrow \; kein\ Extremum$$

Die notwendige Bedingung wird zudem auch nicht erfüllt, da k > 0 gelten muss;
daher ist auch das Kriterium 2. Ableitung nicht relevant.

Aufgabe 3: **Randfunktion und Abszisse II** | 8 | |

Gegeben sei die Randfunktion $f_k(x) = \frac{2}{k^2}x - \frac{2}{k^3}x^2 \quad mit\ k \neq 0$

Beweisen Sie, dass der Inhalt der von der Funktion mit der x-Achse eingeschlossenen Fläche unabhängig von k ist.

$$f_k(x) = \frac{2}{k^2}x - \frac{2}{k^3}x^2 \quad mit\ k \neq 0$$

Nullstellen:

$$\left(\frac{2}{k^2} - \frac{2}{k^3}x\right)x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad und \quad x = k$$

Fläche:

$$\int_0^k \left(\frac{2}{k^2}x - \frac{2}{k^3}x^2\right)dx = \left[\frac{1}{k^2}x^2 - \frac{2}{3k^3}x^3\right]_0^k = \frac{1}{k^2}k^2 - \frac{2}{3k^3}k^3 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Aufgabe 4: **Fläche zwischen Funktionen I** | 10 | |

Der Graph einer Funktion $f(x) = \frac{1}{18}x^3$ wird vom einer Ursprungsgeraden mit positiver Steigung geschnitten.

Wie groß ist die Steigung, damit die umschlossene Fläche 18 FE beträgt?

$$f(x) = \frac{1}{18}x^3 \quad und \quad g(x) = mx$$

Schnittstellen:

$$f_k(x) = g(x) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{18}x^3 = mx$$

$$\rightarrow \quad \left(\frac{1}{18}x^2 - m\right)x = 0$$

$$\rightarrow \quad x = 0 \quad und \quad x = \sqrt{18m}$$

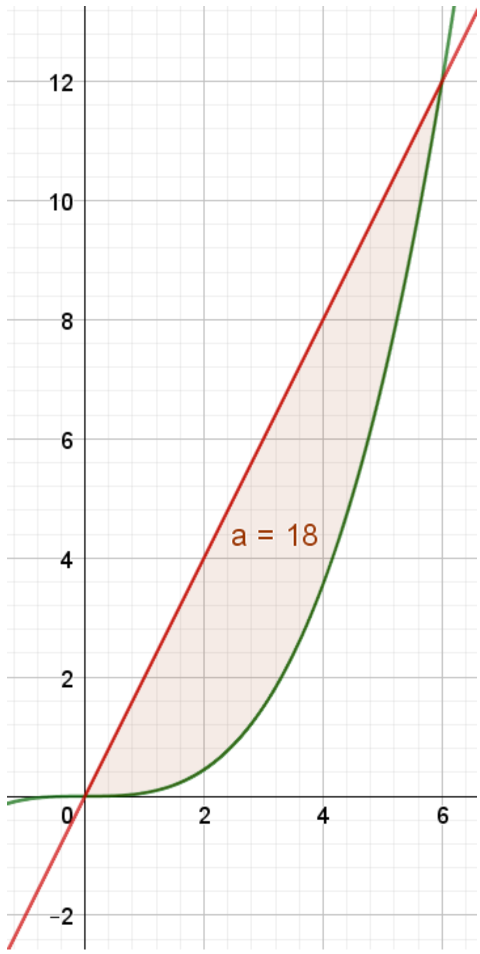
Fläche:

$$\int_0^{\sqrt{18m}} \left(\frac{1}{18}x^3 - mx\right)dx = \left[\frac{1}{72}x^4 - \frac{1}{2}mx^2\right]_0^{\sqrt{18m}}$$

$$= \frac{324}{72}m^2 - 9m^2 = 4{,}5m^2 \overset{!}{=} 18$$

$$\rightarrow \quad m^2 = 4 \quad \rightarrow \quad m = \pm 2$$

$$\xrightarrow{m\ >0} \quad m = 2$$



Aufgabe 5: **Fläche zwischen Funktionen II** 10

Gegeben sei die Funktion $g(x) = \frac{1}{4}x^2$.

a) Bestimmen Sie die Fläche unter der Parabel mit der x-Achse im Intervall [0 ; 6].

b) Welche **Parallele zur y-Achse** halbiert die Fläche unter der Parabel im angegebenen Intervall?

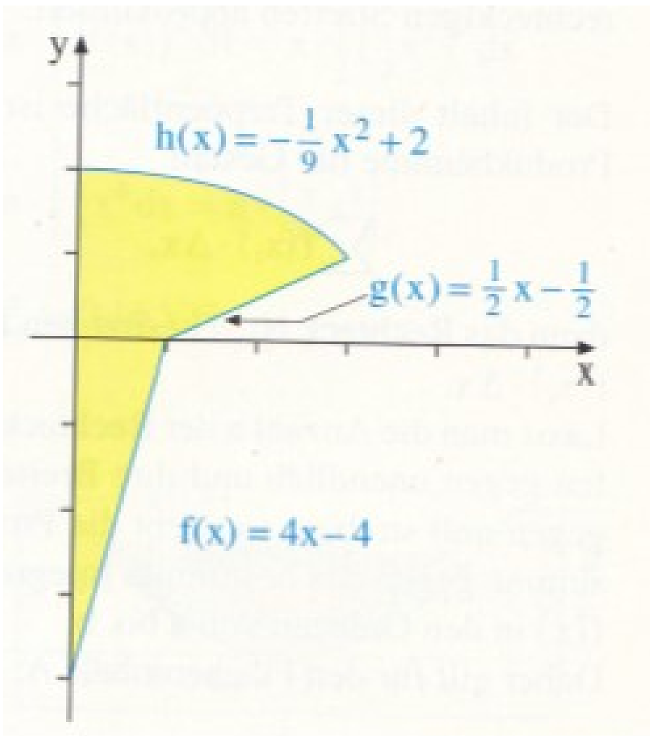
$$\int_0^6 g(x)\,dx = \int_0^6 \frac{1}{4}x^2 dx = \left[\frac{1}{12}x^3\right]_0^6 = \left[\frac{1}{12}x^3\right]_0^6 = 18$$

$$\rightarrow \int_0^k \frac{1}{4}x^2 dx = \left[\frac{1}{12}x^3\right]_0^k \stackrel{!}{=} 9 \rightarrow \frac{1}{12}k^3 = 9 \rightarrow k^3 = 108 \rightarrow k = \sqrt[3]{108} \approx 4,76$$

Aufgabe 6: 12

Fläche zwischen Funktionen III

Berechnen Sie den Inhalt der abgebildeten gefärbten Fläche:



Schnittstellen können durch Einsetzen der x-Werte ermittelt bzw. bestätig werden.

Fläche unterhalb x-Achse: $A_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 = 2$

Fläche zwischen h(x) und x-Achse im Intervall I = [0;3]:

$$A_2 = \int_0^3 h(x)\,dx = \int_0^3 \left(-\frac{1}{9}x^2 + 2\right)dx = \left[-\frac{1}{27}x^3 + 2x\right]_0^3 = -1 + 6 = 5$$

Fläche zwischen g(x) und x-Achse im Intervall I = [1;3]: $A_3 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$

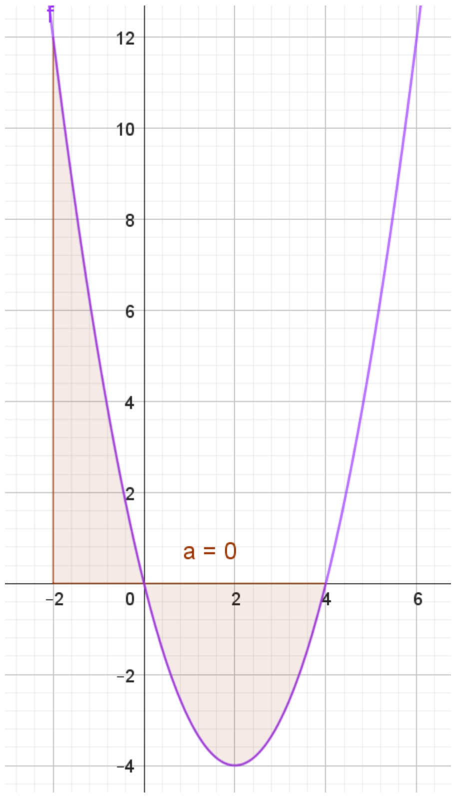
Gesamtfläche: $A_{gesamt} = A_1 + A_2 - A_3 = 2 + 5 - 1 = 6$

Aufgabe 7: **Integral**

10	

Berechnen Sie den Wert des Integrals, fertigen Sie eine Skizze der Situation für k = 2 an und erläutern bzw. begründen Sie damit Ihr Ergebnis:

$$\int_{-k}^{2k} x\cdot(x-2k)\;dx.$$



$$\int_{-k}^{2k} g(x)\,dx = \int_{-k}^{2k}\left(x^2-2kx\right)dx$$

$$\int_{-k}^{2k} g(x)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3-kx^2\right]_{-k}^{2k}$$

$$\int_{-k}^{2k} g(x)\,dx = \left(\frac{8}{3}k^3-4k^3\right)-\left(-\frac{1}{3}k^3-k^3\right)$$

$$\int_{-k}^{2k} g(x)\,dx = \frac{8}{3}k^3-4k^3+\frac{1}{3}k^3+k^3 = 0$$

Das Integral verrechnet die „positive" und „negative" Teilfläche aufgrund der im Intervall vorliegenden Nullstelle miteinander; Da beide Teilflächen die gleiche Maßgröße besitzen, ergibt sich der Wert 0.

Aufgabe 8: **Grenzen ermitteln**

10	

Wie muss der Parameter gewählt werden, damit eine korrekte Aussage entsteht?

a) $$\int_{k}^{4} 4x^3dx = 255$$

$$\int_{k}^{4} 4x^3dx = \left[x^4\right]_k^4 = 256-k^4 \overset{!}{=} 255 \rightarrow k^4=1 \rightarrow k=\pm1$$

b) $$\int_{k}^{k^2} 2xdx = 12$$

$$\int_{k}^{k^2} 2xdx = \left[x^2\right]_k^{k^2} = k^4-k^2 = 12 \rightarrow k^4-k^2-12 = 0$$

$$\xrightarrow[u=k^2]{Substitution} u^2-u-12 = 0 \rightarrow u_1=4 \quad und \quad u_2=-3\left[Widerspruch\right]$$

$$\xrightarrow[u=k^2]{\text{Re}-Substitution} k^2 = 4 \rightarrow k_1=2 \quad und \quad k_2=-2$$

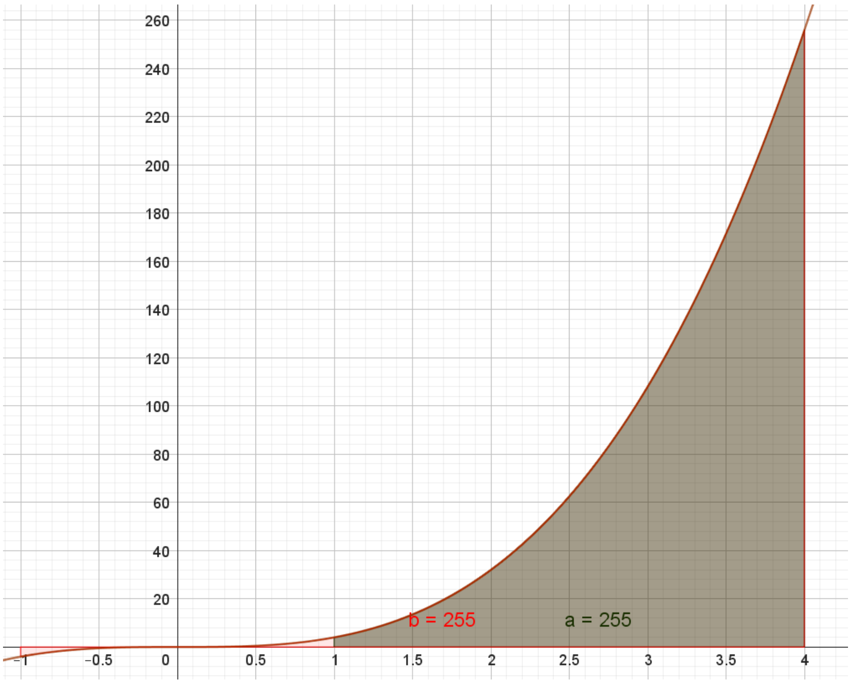
Oh je – hier kommen ja zwei Ergebnisse für die Parameter heraus.

Begründen Sie, weshalb beide Lösungen korrekt sein können 😉

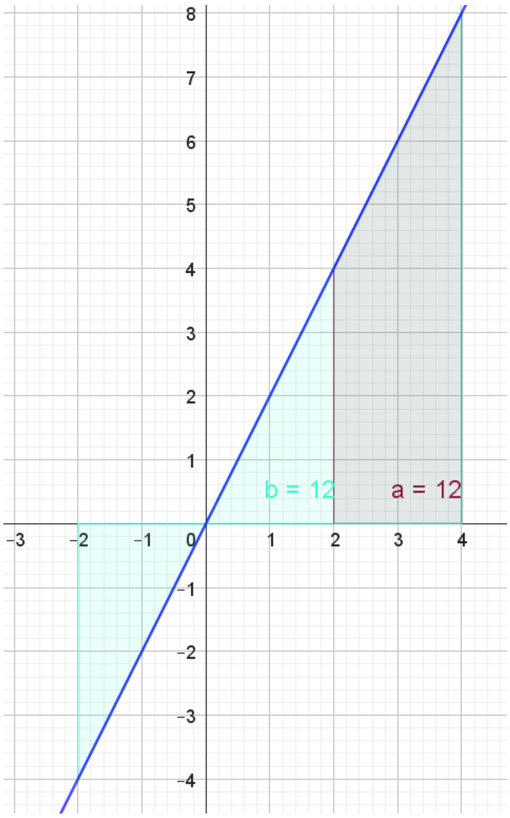
Erklärung:

In beiden Fällen wird in der 2. Lösung das Integral herangezogen und nicht der orientierte Flächeninhalt.

Graph/Skizze Teilaufgabe a)



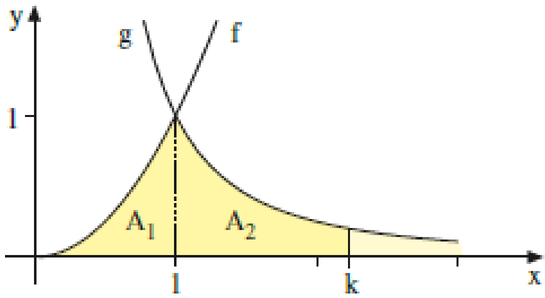
Graph/Skizze Teilaufgabe b)



Aufgabe 9: **Uneigentliches Integral**

12	

Ermitteln Sie den Inhalt der Gesamtfläche A ($A = A_1 + A_2$) mit der x-Achse, wenn sich der Graph der Funktion g(x) längs der positiven x-Achse ins Unendliche erstreckt.



Die Randfunktionen lauten

$$f(x) = x^2 \quad und \quad g(x) = \frac{1}{x^2}$$

Fläche A_1: $$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right] = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

Fläche A_2:

$$\lim_{k \to \infty} \int_1^k g(x) dx = \lim_{k \to \infty} \int_1^k \frac{1}{x^2} dx = \lim_{k \to \infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^k = \lim_{k \to \infty} \left(-\frac{1}{k}\right) - \left(-\frac{1}{1}\right) \to 1$$

Gesamtfläche: $$A_{gesamt} = \frac{4}{3}$$

Auswahl: **Wählen Sie von den folgenden 4 Aufgaben (10 – 13) bitte zwei zur Bearbeitung aus!**

Aufgabe 10: **Extremwertaufgabe I** | 10 | |

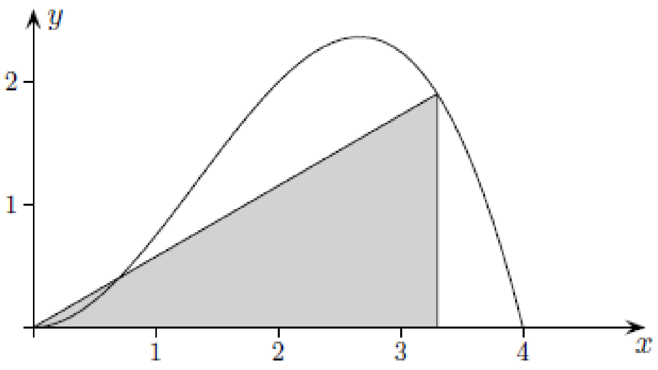
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2(4-x) \quad mit\ x \in [0;4]$$

Für jedes u > 0 sind die Eckpunkte eines Dreiecks wie folgt festgelegt:

A (0 / 0) B (u / 0) C (u / f(u))

Bestimmen Sie den Wert für u nun so, dass dieses Dreieck maximalen Flächeninhalt hat.



$$Zielfunktion: \quad A(g,h) = \frac{1}{2}\cdot g\cdot h \quad \rightarrow \quad A(x,y) = \frac{1}{2}\cdot x\cdot y$$

$$Nebenbedingung: \quad f(x) = \frac{1}{4}x^2(4-x)$$

$$Ansatz: \quad A(x) = \frac{1}{2}\cdot x\cdot \frac{1}{4}x^2(4-x) = \frac{1}{8}x^3(4-x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^4$$

$$A'(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 = 0 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x\right)x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 3 \quad und \quad x = 0$$

$$A''(x) = 3x - \frac{3}{2}x^2 \quad \rightarrow \quad A''(3) = 9 - \frac{27}{2} = -4{,}5 < 0 \quad \rightarrow \quad MAX$$

Die Lösung x = 0 stellt keine Lösungsoption dar, da diese eine doppelte Lösung in der 1. Ableitung ist und damit auf eine Wendestelle schließen lässt.

Aufgabe 11: **Extremwertaufgabe II** | 10 | |

Die Katheten eines Dreiecks sind zusammen 12 cm lang.
Wie groß sind die Katheten x und y zu wählen, damit das Quadrat F über der Hypotenuse z möglichst klein wird?

Welchen Wert besitzt die gesuchte Quadratfläche?

$$Zielfunktion: \quad A(x,y) = x^2 + y^2$$

$$Nebenbedingung: \quad 12 = x + y \quad \rightarrow \quad y = 12 - x$$

$$Ansatz: \quad A(x,y) = x^2 + (12-x)^2 = x^2 + 144 - 24x + x^2 = 2x^2 - 24x + 144$$

$$A'(x) = 4x - 24 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 6 \quad \rightarrow \quad y = 6$$

$$A''(x) = 4 > 0 \quad \rightarrow \quad MIN \quad \rightarrow \quad A(6;6) = 36 + 36 = 72$$

Aufgabe 12: **Rekonstruktion I**

10	

Eine ganzrationale Funktion 3. Grades ist punktsymmetrisch zum Ursprung, hat ein Maximum bei $x=\sqrt{3}$, eine weitere Nullstelle bei x = 3 und schließt im I. Quadranten mit der x-Achse eine Fläche mit dem Inhalt $A=\frac{9}{4}$ ein.

Bestimmen Sie die Funktionsvorschrift.

$$f(x)=ax^3+cx \qquad f'(x)=3ax^2+c \qquad F(x)=\frac{1}{4}ax^4+\frac{1}{2}cx^2$$

$$(i) \quad f'\left(\sqrt{3}\right)=3a\cdot\sqrt{3}^2+c=0 \;\rightarrow\; 9a+c=0 \;\rightarrow\; c=-9a$$

$$(ii) \quad f(3)=a\cdot 3^3+c\cdot 3=0 \;\rightarrow\; 27a+3c=0$$

$$(iii) \quad \left[\frac{1}{4}ax^4+\frac{1}{2}cx^2\right]_0^3=\frac{9}{4} \;\rightarrow\; \frac{81}{4}a+\frac{9}{2}c=\frac{9}{4} \xrightarrow{c=-9a} \frac{81}{4}a+\frac{9}{2}(-9a)=\frac{9}{4}$$

$$\rightarrow\; \frac{81}{4}a-\frac{81}{2}a=\frac{9}{4} \;\rightarrow\; -\frac{81}{4}a=\frac{9}{4} \;\rightarrow\; a=-\frac{1}{9} \;\rightarrow\; c=1$$

$$\rightarrow\; f(x)=\left(-\frac{1}{9}\right)x^3+x$$

Aufgabe 13: **Rekonstruktion II**

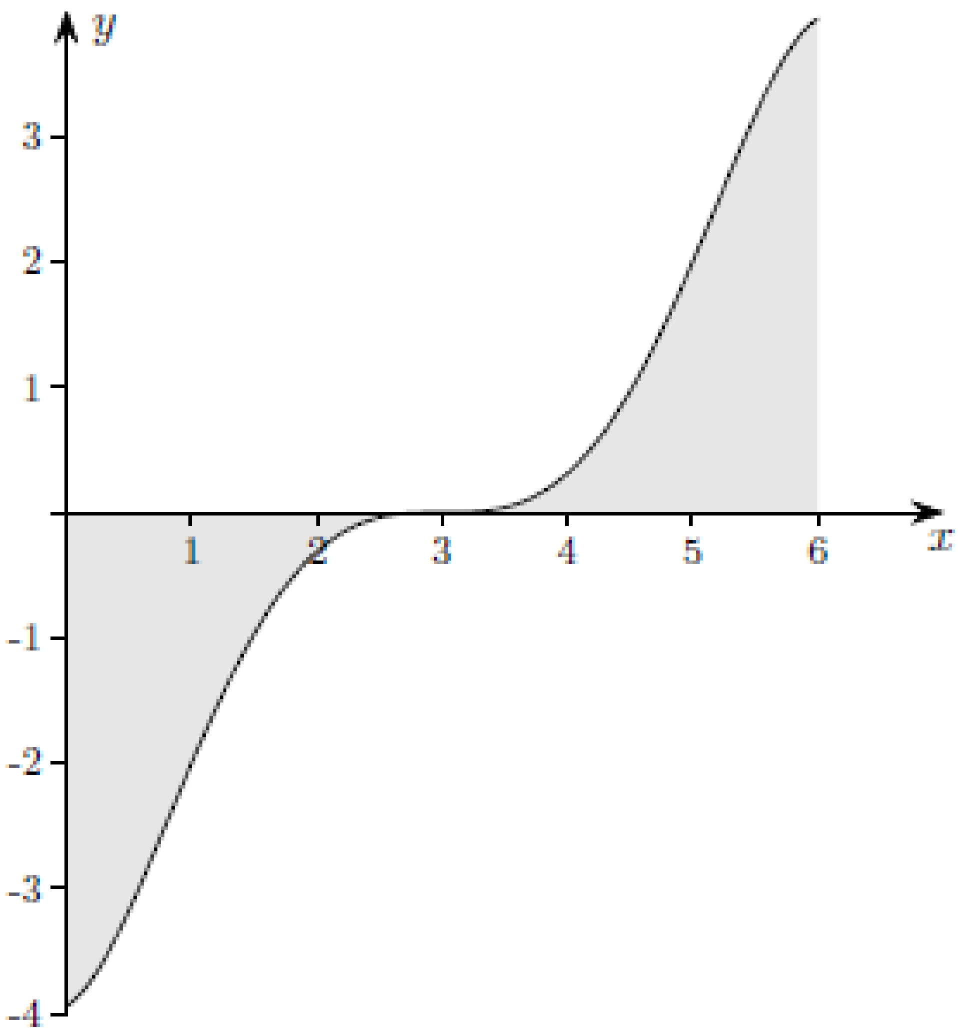
10	

Eine ganzrationale hat folgende Eigenschaften:

1	$g(3)=0$	Der Punkt P(3 / 0) liegt auf dem Graphen der Funktion g(x).
2	$g'(3)=0$	An der Stelle x = 3 besitzt die Funktion g(x) die Steigung m = 0; also eine waagrechte Tangente.
3	$g'(1)>0$	An der Stelle x = 1 besitzt die Funktion eine positve Steigung bzw. ist streng monoton steigend.
4	$g''(4)>0$	An der Stelle x = 4 hat der Graph der Funktion eine zunehmende Steigung => ist linksgekrümmt.
5	$\int_0^6 g(x)\,dx=0$	Im Intervall I = [0 ; 6] sind die Flächen des Graphen unterhalb und oberhalb mit der x-Achse gleich groß.

Welche Bedeutung haben die jeweiligen Angaben für den Graphen?

Skizzieren Sie einen möglichen Graphen, auf den alle Angaben zutreffen im Intervall I = [0 ; 6].



y
3
2
1
-1
-2
-3
-4
1
2
3
4
5
6
x