12. Jgst.	**6. Test**	**Datum: 20.03.2024**
Kurs M LK 1/2	**Fach: Mathematik (Leistungsfach)**	

**Thema: Matrizen- und Determinantenrechnung;
Lineare Gleichungssysteme**

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Aufgabe 1: **Rechenoperationen mit Matrizen** **16**

Gegeben seien folgende Matrizen A, B und C:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 4 & 2 & -1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ -4 & 2 & 1\end{pmatrix}\quad und\quad C=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Ergebnisse zu folgenden Aufgaben

$$2A+3B \qquad C^T\cdot(B-A) \qquad \left(B\cdot A^T\right)^2$$

$$2A+3B=2\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 4 & 2 & -1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ -4 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 6 & 0\\ 8 & 4 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 0 & 9\\ -12 & 6 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 6 & 9\\ -4 & 10 & 1\end{pmatrix}$$

$$(B-A)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ -4 & 2 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 4 & 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -3 & 3\\ -8 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c}
C^T\cdot(B-A) & \begin{pmatrix}0 & -3 & 3\\ -8 & 0 & 2\end{pmatrix}\\ \hline
\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-8 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 3\end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c}
\left(B\cdot A^T\right)^2 & \begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -13\end{pmatrix}\\ \hline
\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ -4 & 2 & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -13\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}3 & -12\\ -24 & 171\end{pmatrix}
\end{array}$$

Aufgabe 2: **Anwendung zu Grundrechenoperationen** | **8** | |

Eine Großküche beliefert die Unternehmen (B)ertolini und (K)alkmeyer ***täglich*** mit den Menüs I, II und III gemäß angegebener Tabelle.

	Menü I	*Menü II*	*Menü III*
B	260	320	110
K	65	80	45

a) Wie viele Menüs werden in einer Arbeitswoche an B und K ausgeliefert, wenn am Wochenende nicht gearbeitet wird?

b) Jeden Freitag lässt die Großküche die ausgelieferten Menüs in den Unternehmen gegenzeichnen. Menü II kann kurzfristig für Gäste nachbestellt werden. Wie viele Essen wurden **nach**bestellt, wenn folgende Abrechnung für Menü II vorliegt?

$$Menü\_II = \begin{pmatrix} 1.650 \\ 410 \end{pmatrix}$$

$$5 \cdot A = 5 \cdot \begin{pmatrix} 260 & 320 & 110 \\ 65 & 80 & 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.300 & 1.600 & 550 \\ 325 & 400 & 225 \end{pmatrix}$$

$$Menü\_II = \begin{pmatrix} 1.650 \\ 410 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad Zusatz = \begin{pmatrix} 1.650 - 1.600 \\ 410 - 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3: **Grundrechenoperationen** | **10** | |

Gegeben sind die Matrizen A und B mit $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad und \quad B = \begin{pmatrix} a & 15 \\ b & c \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie a, b, c und s so, dass gilt: $6 \cdot A - s \cdot B \;=\; O$

$$6 \cdot A - s \cdot B \;=\; O$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad und \quad B = \begin{pmatrix} a & 15 \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$6 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} a & 15 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 30 \\ -12 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} s \cdot a & 15s \\ s \cdot b & s \cdot c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(i) \quad 30 - 15s = 0 \quad \rightarrow \quad s = 2$$

$$(ii) \quad s \cdot c = 0 \quad \rightarrow \quad c = 0$$

$$(iii) \quad 18 - s \cdot a = 0 \quad \rightarrow \quad a = 9$$

$$(iv) \quad -12 - s \cdot b = 0 \quad \rightarrow \quad b = -6$$

Aufgabe 4: **Lineare Gleichungssysteme** | 18 | |

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Gleichungssysteme:

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Gauß − Verfahren

	x	y	z	b	Umformung
i	1	1	0	6	
ii	1	0	1	8	$ii-i$
iii	1	1	1	12	$iii-i$
i	1	1	0	6	$i+ii$
ii	0	−1	1	2	$(-1)\cdot ii$
iii	0	0	1	6	
i	1	0	1	8	$i-iii$
ii	0	1	−1	−2	$ii+iii$
iii	0	0	1	6	
i	1	0	0	2	
ii	0	1	0	4	
iii	0	0	1	6	

Gauß − Verfahren

	x	y	z	b	Umformung
i	3	2	1	12	$i+iii$
ii	4	−5	−1	−4	
iii	−2	1	3	4	
i	1	3	4	16	
ii	4	−5	−1	−4	$ii-4i$
iii	−2	1	3	4	$iii+2i$
i	1	3	4	16	
ii	0	−17	−17	−68	$ii/(-17)$
iii	0	7	11	36	
i	1	3	4	16	$i-3ii$
ii	0	1	1	4	
iii	0	7	11	36	$iii-7ii$
i	1	0	1	4	$i-0,25iii$
ii	0	1	1	4	$i-0,25iii$
iii	0	0	4	8	$iii/4$
i	1	0	0	2	
ii	0	1	0	2	
iii	0	0	1	2	

Aufgabe 5: **Determinanten** | 10 | |

Ermitteln Sie den Wert der Determinanten der Matrizen:

$$Det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2a \\ 4 & -3 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \overset{Sarrus}{=} 9-2+40a-6a-15+8 = 34a$$

$$Det(B) = Det\begin{pmatrix} k & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k \end{pmatrix} \underset{Hauptdiagonale}{\overset{Laplace-Entwicklung}{=}} -3k^2$$

Aufgabe 6: **Inverse ermitteln** | 16 | |

Gegeben sei die Matrix $F = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & a & a^2 \end{pmatrix}$

a) Für welche Werte von a ist die Matrix nicht invertierbar?

$$Det(F) = Det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & a & a^2 \end{pmatrix} \overset{Sarrus}{=} a^2+0+0-0-2a-0 = a^2-2a \overset{!}{=} 0$$

$$\rightarrow \quad a=0 \quad oder \quad a=2$$

b) Bestimmen Sie die Inverse zu F, wenn a = 3 gilt.

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{adj.} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 27 & 9 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} 3 & 27 & 5 \\ 0 & 9 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Vorzeichen} \begin{pmatrix} 3 & -27 & 5 \\ 0 & 9 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{Det(F)}} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -27 & 5 \\ 0 & 9 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$Probe:$

$$\begin{array}{c|c} F \cdot F^{-1} = E & \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -27 & 5 \\ 0 & 9 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

c) Rudi hat eine Inverse zur Matrix F ausgerechnet: $F^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

Zeigen Sie, dass diese Matrix nicht die Inverse sein kann.

$Probe: \quad F \cdot F^{-1} = E$

$$\begin{array}{c|c} F \cdot F^{-1} = E & \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -7 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} \quad Widerspruch\ zu\ E$$

12	

Aufgabe 7: **Matrizen darstellen**

a) Erstellen Sie ein 4x4-Matrix, für deren Elemente gilt: $a_{i,j} = \begin{cases} i & für \quad i<j \\ 0 & für \quad i=j \\ j-i & für \quad i>j \end{cases}$

$$a_{i,j} = \begin{cases} i & für \quad i<j \\ 0 & für \quad i=j \\ j-i & für \quad i>j \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Welches Format hat die gegebene Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -5 & -16 \\ 0 & 4 & 3 & \sqrt{2} \\ 6 & 0,5 & 0 & -0,3 \end{pmatrix}$

Format: 3 x 4 3 Zeilen / 4 Spalten

c) Nennen Sie die folgenden Zahlenwerte bzw. Werte der Elemente der Matrix A bzw. begründen Sie, weshalb diese nicht existieren:

$$a_{1,2} \quad a_{3,4} \quad a_{3,1} \quad a_{3,3} \quad a_{4,3}$$

$a_{1,2} = 7$ $a_{3,4} = -0,3$ $a_{3,1} = 6$ $a_{3,3} = 0$ $a_{4,3}$ $nicht.def.$