12. Jgst.	8. Test	Datum: 17.05.2024
Kurs M LK	Fach: Mathematik (Leistungsfach)	

Thema: **Übergangsprozesse und Stat. GG; Populationsmodelle**

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Aufgabe 1: **Populationsentwicklungen I**

6

Für Populationsentwicklungen sind Übergangmatrizen gegeben.
Bestimmen Sie die Wachstumsfaktoren im Sinne der zyklischen Entwicklung, erläutern Sie kurz Ihr Ergebnis und geben Sie die Länge des jeweiligen Zyklus an.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0{,}3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Zyklus-Wert: 0,3 * 5 = 1,5 > 1 => Wachstum (Zyklus: 2 Jahre)
Zyklus-Wert: 0,6 * 0,2 * 8 = 0,96 < 1 => Schrumpfung (Zyklus: 3 Jahre)

10

Aufgabe 2: **Populationsentwicklungen II**

Gegeben sei die Populationsentwicklung mit Hilfe der Matrix M durch $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b und c so, dass sich eine Startverteilung von $\overrightarrow{p_0} = \begin{pmatrix} 1.000 \\ 500 \\ 100 \end{pmatrix}$

nach zwei Jahren reproduziert: $M^2 \cdot \overrightarrow{p_0} = \overrightarrow{p_0}$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & bc & 0 \\ 0 & 0 & ac \\ ab & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot \overrightarrow{p_0}} \begin{pmatrix} 0 & bc & 0 \\ 0 & 0 & ac \\ ab & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.000 \\ 500 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500bc \\ 100ac \\ 1000ab \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 500bc \\ 100ac \\ 1000ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.000 \\ 500 \\ 100 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} bc \\ ac \\ ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0{,}1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} b = \frac{2}{c} \\ a = \frac{5}{c} \\ ab = 0{,}1 \end{matrix} \rightarrow \frac{2}{c} \cdot \frac{5}{c} = 0{,}1 \rightarrow \frac{10}{c^2} = 0{,}1$$

$$\rightarrow c^2 = 100 \rightarrow c = 10 \rightarrow b = \frac{2}{10} = 0{,}2 \rightarrow a = \frac{5}{10} = 0{,}5 \rightarrow M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3: **Fixvektor oder statisches Gleichgewicht** | 10 | |

a) Berechnen Sie die Parameter a, b, und c so, dass der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 30 \\ 45 \\ 24 \end{pmatrix}$ ein

Fixvektor (= Vektor des statischen Gleichgewichts) zur Matrix M $M = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & b \\ a & 0,4 & a \\ c & 0,2 & a \end{pmatrix}$ ist.

Lösung:

$$Ansatz: \quad M \cdot \vec{v} = \vec{v} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & b \\ a & 0,4 & a \\ c & 0,2 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 45 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30+24b \\ 18+54a \\ 30c+9+24a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 45 \\ 24 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} b=0 \\ a=0,5 \\ c=0,1 \end{pmatrix}$$

b) Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} b \\ 1-a \end{pmatrix}$ ein Fixvektor zur Matrix

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$ darstellt.

Lösung:

$$Ansatz: \quad M \cdot \vec{v} = \vec{v} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} b \\ 1-a \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ab+b-ab \\ b-ab+1-a-b+ab \end{pmatrix} \end{array}$$

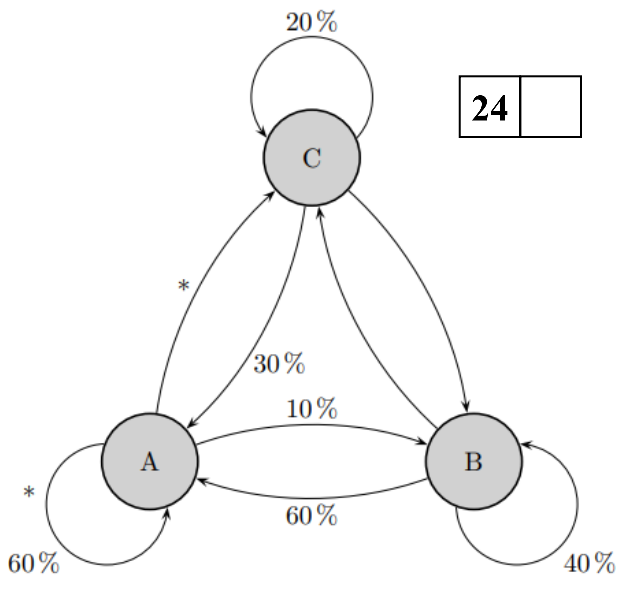
$$\rightarrow \quad \begin{pmatrix} ab+b-ab \\ b-ab+1-a-b+ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 1-a \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4: **Übergangsvorgänge** | 24 | |

In einem Wildreservat untersuchen Wissenschaftler die monatlichen Wanderbewegungen KaulOlme – eine besonders geschützte Wildtierart.

Die Ergebnisse der Untersuchung sind im Schaubild festgehalten:

a) Ergänzen Sie das Diagramm und erstellen Sie die Übergangsmatrix.



Lösung: $U=\begin{pmatrix}0,6 & 0,6 & 0,3\\ 0,1 & 0,4 & 0,5\\ 0,3 & 0 & 0,2\end{pmatrix}$

b) In einem bestimmten Zeitpunkt ist die Verteilung wie folgt: $\vec{v}=\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}400\\200\\200\end{pmatrix}$

Bestimmen Sie die Verteilung für die nächsten zwei Monate.

Lösung:

$$U\cdot\overrightarrow{v_0}=\overrightarrow{v_1}\quad\rightarrow\quad\begin{pmatrix}0,6 & 0,6 & 0,3\\ 0,1 & 0,4 & 0,5\\ 0,3 & 0 & 0,2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}400\\200\\200\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}420\\220\\160\end{pmatrix}\qquad U\cdot\overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{v_2}\quad\rightarrow\quad\begin{pmatrix}0,6 & 0,6 & 0,3\\ 0,1 & 0,4 & 0,5\\ 0,3 & 0 & 0,2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}420\\220\\160\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}432\\210\\158\end{pmatrix}$$

c) Bestimmen Sie das statische Gleichgewicht zu dieser Situation.

Lösung:

$$(U-E)\cdot\vec{x}=\vec{0}\quad\xrightarrow{x+y+z=1}\quad\begin{pmatrix}-0,4 & 0,6 & 0,3\\ 0,1 & -0,6 & 0,5\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\quad\rightarrow\quad\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{89}\begin{pmatrix}48\\23\\18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,54\\0,26\\0,20\end{pmatrix}$$

d) Die Wissenschaftler kommen zu der Erkenntnis, dass die optimale statische Verteilung

bei $\vec{x}=\begin{pmatrix}300\\250\\240\end{pmatrix}$ KaulOlmen liegt.

Hierzu sollen die mit (*) markierten Übergänge verändert werden. Prüfen Sie, ob die Umsetzung dieser Erkenntnis möglich ist.

Ansatz: $U\cdot\vec{x}=\vec{x}$

Lösung:

$$U^*\cdot\vec{x}=\vec{x}\quad\rightarrow\quad\begin{pmatrix}a & 0,6 & 0,3\\ 0,1 & 0,4 & 0,5\\ b & 0 & 0,2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}300\\250\\240\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}300a+222\\250\\300b+48\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}300\\250\\240\end{pmatrix}\rightarrow\begin{matrix}300a=78\\ \\300b=192\end{matrix}\rightarrow\begin{matrix}a=0,26\\ \\b=0,64\end{matrix}$$

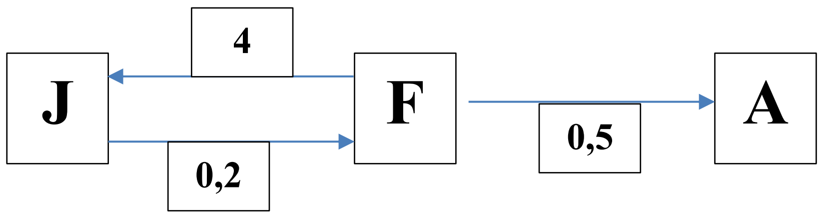
Aufgabe 5: **Populationsmodell** 10

Bei einer Tierart werden drei Entwicklungsstufen unterscheiden:
(J)ungtiere – (F)ortpflanzungsfähige Tiere und (A)lttiere, die nicht mehr fortpflanzungsfähig sind.

Es entsteht folgende Matrix: $U = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$

a) Zeichnen Sie das zur Matrix U passende Übergangsdiagramm.

Lösung:



Zu Beginn sind lediglich 200 (J)ungtiere vorhanden.

b) Ermitteln Sie die Werte der jeweiligen Entwicklungsstufen für die nächsten drei Jahre.

Lösung:

$$Ansatz\ 1: \quad U \cdot \overrightarrow{p_0} = \overrightarrow{p_1} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Ansatz\ 2: \quad U \cdot \overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{p_2} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$Ansatz\ 3: \quad U \cdot \overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{p_3} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 160 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 32 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ZUSATZFRAGE: 3

Wie hoch muss der Wert der (F)ortpflanzungsfähige Tiere sein, damit ein zyklisches Verhalten vorliegt?

0,2 * c = 1 => c = 5