11. Jgst.	2. Kursarbeit	Datum: 04.01.2023
Klasse: GY 22a	Fach: Mathematik (Kernfach)	

Thema: Ganzrationale Funktionen Grad n; Horner-Schema; Nullstellen; Symmetrie

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Name:	
Punkte:	Note:

1.) Ganzrationale Funktionen - Koeffizienten **10**

a) Eine ganzrationale Funktion sei durch folgende Koeffizienten gegeben:

$a_9 = -0{,}8$ **$a_7 = 2$** **$a_5 = a_3 = -4$** **$a_2 = a_1 = a_0 = 2$**

Erstellen Sie die Funktionsvorschrift und geben Sie den Grad der Funktion an.

LÖSUNG: Grad n = 9 $f(x) = -0{,}8x^9 + 2x^7 - 4x^5 - 4x^3 + 2x^2 + 2x + 2$

b) Bestimmen Sie **Grad**, **Nullstellen** und **a_0** bei folgender Funktion:

$$f(x) = \left(x^4 - 16\right)\left(2x^3 + \frac{1}{4}\right)\left(x^2 - 9\right)$$

LÖSUNG: Grad n = 9 Nullstellen: $x \in \left\{\pm 2; \pm 3; -\frac{1}{2}\right\}$ $a_0 = 36$

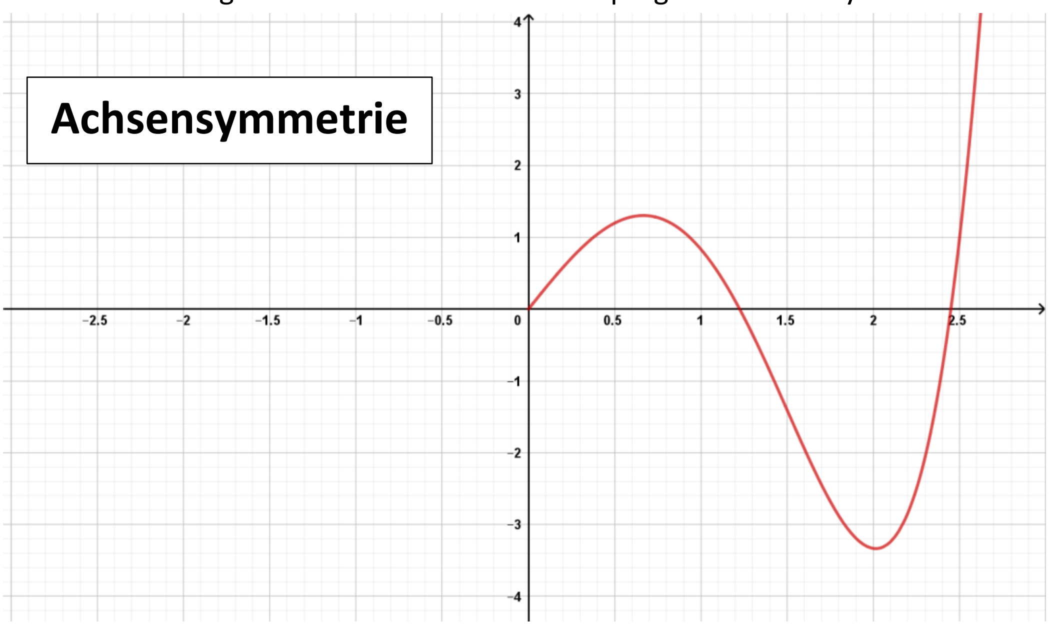
2.) Symmetrie **10**

a) Geben Sie eine punkt- und eine achsensymmetrische Funktion an und begründen anhand Ihrer Beispiele, warum die entsprechende Symmetrie vorliegt.

LÖSUNG: Achsensymmetrie $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{2k} x^{2k}$ Bedingung: $f(-x) = f(x)$

Punktsymmetrie $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1} x^{2k+1}$ Bedingung: $f(-x) = -f(x)$

b) Vervollständigen Sie das Schaubild mit entspr. gewünschter Symmetrie:



3.) **Horner-Schema** | 12 | |

a) Bestimmen Sie den Funktionswert der Funktion

$f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 5x + 6$ an der Stelle **x = -2**

mit dem Horner-Schema.

LÖSUNG:

	2	**- 4**	**3**	**- 5**	**6**
x = - 2		**- 4**	**16**	**- 38**	**86**
	2	**- 8**	**19**	**- 43**	**92**

b) Bestimmen Sie den Funktionswert der Funktion

$g(x) = -x^5 + 5x^3 - 2x^2$ an der Stelle x = 3

mit dem Horner-Schema.

LÖSUNG:

	- 1	**0**	**5**	**- 2**	**0**	**0**
x = 3		**- 3**	**- 9**	**- 12**	**- 42**	**- 126**
	- 1	**- 3**	**- 4**	**- 14**	**- 42**	**- 126**

c) Oh je – hier soll das Horner-Schema verwendet werden, aber leider fehlen ein paar Koeffizienten.

Bitte vervollständigen Sie das Schema und führen Sie die Berechnungen durch.

LÖSUNG:

Wert Koeffizient	**- 5**	**6**	**a_1 = 11**	**a_0 = - 4**
x = 2		**- 10**	**- 8**	**6**
Ergebnis	**- 5**	**- 4**	**3**	**2**

4.) **Nullstellen berechnen** | 20 | |

Bestimmen Sie die Nullstellen folgender Funktionen

a) $f(x) = 10x^5 - 40x^4 + 10x^3 + 60x^2$

LÖSUNG:

$$f(x) = \left(10x^3 - 40x^2 + 10x + 60\right)x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0[doppelt]$$

Horner – Schema :

$$\begin{array}{c|cccc} & 10 & -40 & 10 & 60 \\ \hline x=-1 & & -10 & 50 & -60 \\ \hline & 10 & -50 & 60 & 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad x = -1 \quad \rightarrow$$

$$10x^2 - 50x + 60 = 0 \xrightarrow{:10} x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$|x| = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \quad x = 3 \quad \rightarrow \quad x = 2$$

b) $$f(x) = 2(x-4)(x^2+2x-3)$$

LÖSUNG:

$$f(x) = 2(x-4)(x^2+2x-3)=0 \rightarrow (x-4)=0 \wedge (x^2+2x-3)=0$$

$$\rightarrow x=4 \wedge |x|=-1\pm\sqrt{1+3}=-1\pm 2 \rightarrow x=1 \wedge x=-3$$

c) $$f(x) = x^3-5x^2-19x+5x^2-30$$

LÖSUNG:

$$\rightarrow f(x) = x^3-19x-30$$

$Horner-Schema:$

	1	0	−19	−30
$x=-2$		−2	4	30
	1	−2	−15	0

$$\rightarrow x=-2 \rightarrow x^2-2x-15=0 \xrightarrow{pq-Formel} |x|=1\pm\sqrt{1+15}=1\pm 4$$

$$\rightarrow x=5 \rightarrow x=-3$$

d) $$f(x) = x^4-5x^2+4$$

LÖSUNG:

$$f(x) = x^4-5x^2+4 \xrightarrow{Substitution} u^2-5u+4 = 0$$

$$\rightarrow |u| = \frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-4} = \frac{5}{2}\pm\frac{3}{2} \rightarrow u_1=4 \wedge u_2=1 \rightarrow |x|=2 \wedge |x|=1$$

ZUSATZAUFGABE $$f(x) = x^5+7x^4-2x^3-14x^2+x+7$$

6	

LÖSUNG:

$$\rightarrow f(x) = x^5+7x^4-2x^3-14x^2+x+7$$

$Horner-Schema:$

	1	7	−2	−14	1	7
$x=1$		1	8	6	−8	−7
	1	8	6	−8	−7	0
$x=1$		1	9	15	7	
	1	9	15	7	0	
$x=-1$		−1	−8	−7		
	1	8	7	0		

$x=1$

$\rightarrow x=1$

$x=-1$

$$\rightarrow x^2+8x+7=0 \xrightarrow{pq-Formel} |x|=-4\pm\sqrt{16-7}=-4\pm 3 \rightarrow x=7 \rightarrow x=-1$$

5.) **Rekonstruktion ganzrationaler Funktionen (Grundstruktur)** | 18 | |

Ermitteln Sie die Funktionsvorschrift der ganzrationalen Funktionen aufgrund der gegebenen Eigenschaften in der Linearfaktordarstellung

Funktion 1: **Grad 4; Nullstelle x = -1, Nullstelle x = 4 (dreifach) und P(1/4)**

LÖSUNG:

$$f(x)=c\cdot(x+1)\cdot(x-4)^3 \quad\rightarrow\quad f(1)=c\cdot(1+1)\cdot(1-4)^3=4 \quad\rightarrow\quad c\cdot 2\cdot(-27)=4 \quad\rightarrow\quad c=-\frac{2}{27}$$

Funktion 2: **Grad 5; Nullstelle x = 2 (vierfach); Nullstelle x = 3 und P(-1/16)**

LÖSUNG:

$$f(x)=c\cdot(x-2)^4\cdot(x-3) \quad\rightarrow\quad f(-1)=c\cdot(-1-2)^4\cdot(-1-3)=16 \quad\rightarrow\quad c\cdot 81\cdot(-4)=16 \quad\rightarrow\quad c=-\frac{4}{81}$$

Funktion 3: **Grad 4; P(0/2); achsensymmetrisch und vier Nullstellen bei** $x=\{-5\,;\,???\,;1\,;\,???\}$

LÖSUNG:

$$f(x)=c\cdot(x+5)\cdot(x-5)\cdot(x-1)\cdot(x+1) \quad\rightarrow\quad f(0)=c\cdot(-25)\cdot(-1)=2 \quad\rightarrow\quad c=\frac{2}{25}$$

6.) **Anwendungen zu Quadratischen ganzrationalen Funktionen** | 10 | |

Der Querschnitt eines Schiffsrumpfs wird beschrieben durch: $b(x) \;=\; \frac{1}{10}x^2-2,4x+8$

Die auf der Wasseroberfläche befindlichen Auflagepunkte des Schiffes sind C und D.

a) Das Schiffe durchquert eine Passage mit verschiedenen Untiefen.
Die kleinste Untiefe hat laut Karte den Wert u = 7 m uNN.
Wird das Schiff ohne Kollision die Untiefen durchqueren können?

b) Berechnen Sie die Querschnittlänge direkt an der Meeresoberfläche (x-Achse).

c) Wie hoch ragt das Schiff über die Meeresoberfläche heraus
und wie breit (= Querschnittsbreite) ist an dieser Stelle?

LÖSUNG:

$$b(x) \;=\; \frac{1}{10}x^2-2,4x+8=0 \quad\rightarrow\quad x^2-24x+80=0$$

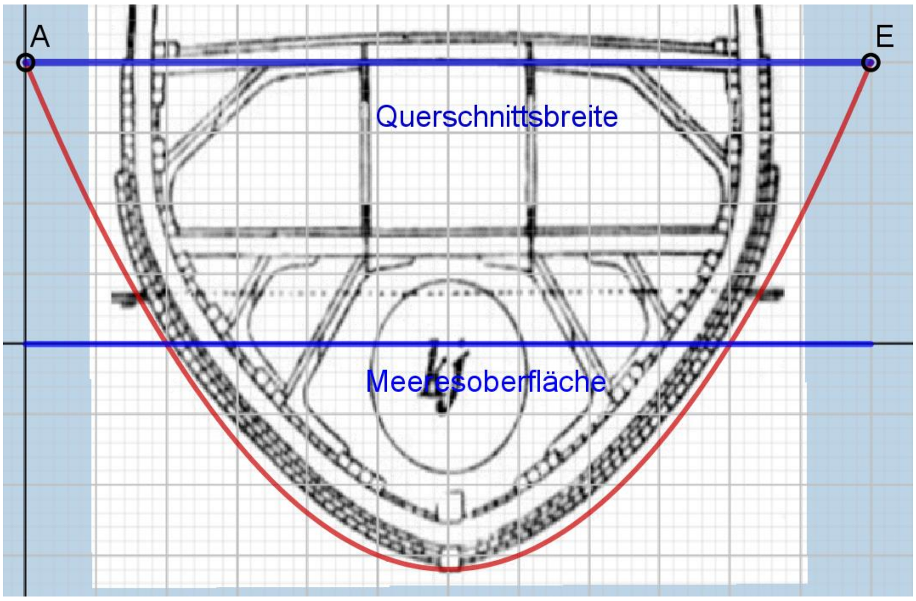
$$\rightarrow\quad |x|=12\pm\sqrt{144-80}=12\pm 8 \quad\rightarrow\quad x_1=4 \;\wedge\; x_2=20$$

$$\rightarrow\quad Querschnittlänge:\;\; 16[m]$$

$$b(0)=8 \quad\rightarrow\quad 8=\frac{1}{10}x^2-2,4x+8 \quad\rightarrow\quad \frac{1}{10}x^2-2,4x=0 \quad\rightarrow\quad \left(\frac{1}{10}x-2,4\right)x=0 \quad\rightarrow\quad x=24$$

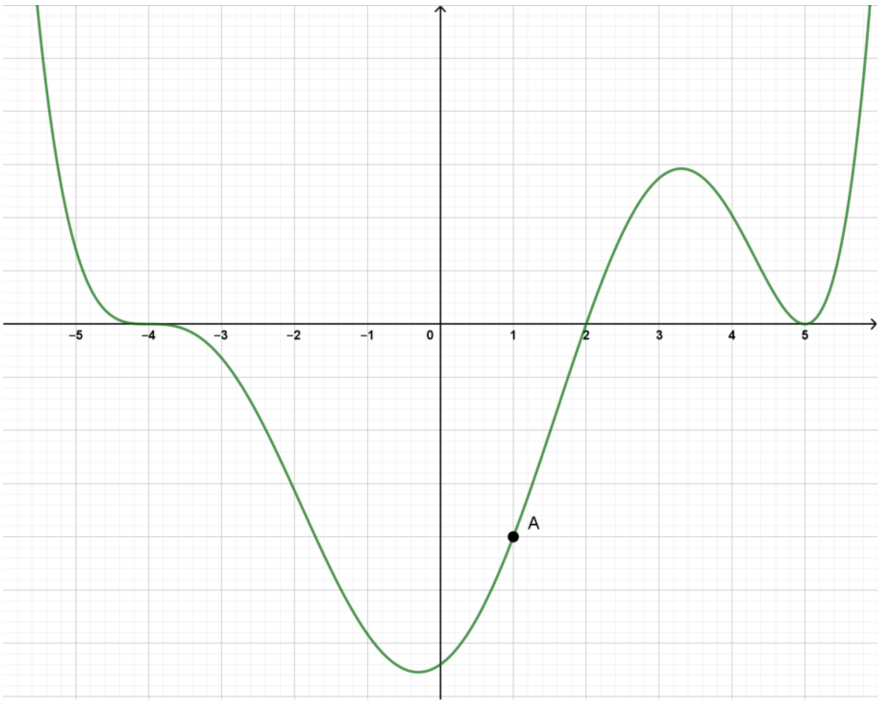
$$\rightarrow\quad Querschnittsbreite:\;\; 24[m]$$

$$Untiefe:\;\; b(12) \;=\; \frac{1}{10}\cdot 12^2-2,4\cdot 12+8 \quad\rightarrow\quad b(12) \;=\; -6,40>7$$



7.) **Funktion aus gegebenem Graphen bestimmen** **10**

Gegeben ist der Graph einer ganzrationalen Funktion:



a) Ermitteln Sie die Funktionsvorschrift aus dem Graphen in der Linearfaktordarstellung, wenn zudem bekannt ist, dass gilt: **$f(x_A) = -200$**

b) An welcher Stelle schneidet der Graph die y-Achse?

LÖSUNG:

$$f(x) = c\cdot(x+4)^3\cdot(x-2)\cdot(x-5)^2 \quad\rightarrow\quad f(1) = c\cdot(1+4)^3\cdot(1-2)\cdot(1-5)^2 = -200$$

$$\rightarrow\quad c\cdot 125\cdot(-1)\cdot 16 = -200 \quad\rightarrow\quad c = \frac{200}{125\cdot 16} = \frac{1}{10}$$

$$f(x) = \frac{1}{10}\cdot(x+4)^3\cdot(x-2)\cdot(x-5)^2 \quad\rightarrow\quad f(0) = \frac{1}{10}\cdot(0+4)^3\cdot(0-2)\cdot(0-5)^2 = 6{,}4\cdot(-50) = -320$$

8.) Kleine Rechnungen …

30

A

Bestimmen Sie die Lösungen ohne Lösungsformel:

a) $7x\cdot(2x-8)=0$ b) $(x+3)\cdot(x-2)=0$

c) $(x+1)^2=0$ d) $\frac{17}{3}\cdot(z^2-121)=0$

e) $x^2-3x=0$ f) $5x^2+25x=x^2-3x$

a) x = 0 ; x = 4
b) x = - 3 ; x = 2

c) x = -1 (doppelt)
d) x = 11 ; x = -11

e) x = 0 ; x = 3
f) x = 0 ; x = - 7

B

Formulieren Sie eine möglichst einfache quadratische Gleichung mit den Lösungen 3 und -7.

$$\text{Ansatz}: \quad f(x)=(x-3)\cdot(x+7) \quad\rightarrow\quad f(x)=x^2+4x-21$$

C

Subtrahiert man vom fünffachen Quadrat einer Zahl ihr Zehnfaches, so erhält man als Ergebnis Null. Wie heißen mögliche Zahlen?

$$\text{Ansatz}: \quad 5x^2-10x=0 \quad\rightarrow\quad (5x-10)x=0 \quad\rightarrow\quad x=0 \quad\wedge\quad x=2$$

D

a (in cm)

a – 2 (in cm)

Der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt 29,25cm^2.

Wie lang sind die beiden Seiten? Ermitteln Sie die Länge der Diagonalen.

$$\text{Ansatz}: \quad f(a)=a\cdot(a-2)=29{,}25 \quad\rightarrow\quad a=\frac{13}{2} \quad\rightarrow\quad a-2=\frac{9}{2}$$

$$\text{Diagonale}: \quad d^2=\left(\frac{13}{2}\right)^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2 \quad\rightarrow\quad d^2=\frac{169+81}{4}=\frac{250}{4} \quad\rightarrow\quad d=\sqrt{62{,}5}$$

Oder:

E

Ein Quader mit quadratischer Grundfläche hat eine Höhe von 3cm und ein Volumen von 108cm^3. Wie lang ist eine Kante der Grundfläche?

$$V(x) \;=\; x^2\cdot 3 \;=\; 108 \quad\rightarrow\quad x^2 \;=\; 36 \quad\rightarrow\quad x=6$$