11. Jgst. **5. Test** **Datum: 06.02.2023**

Klasse: GY 22a **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: Gebrochen-rationale Funktionen
(Untersuchung & Graphen)

Name:	
Punkte:	**Note:**

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

1.) Gebrochen-rationale Funktion 1

Gegeben ist die Funktionsvorschrift $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{(x-3)(x+4)}$

Bearbeiten Sie folgende Fragestellungen:

a) Zähler- und Nennernullstellen
b) Nullstellen und Polstellen der Funktion
c) Asymptote
d) Definitionsmenge
e) Schnittpunkt mit der y-Achse

Lösung:

$$Nullstellen: \quad x = \pm 2 \qquad Polstellen\ mit\ VZW: \quad x_1 = 3 \quad und \quad x_2 = -4$$

$$Asymptote: \quad a(x) = 1 \qquad D = \Re \setminus \{-4; 3\} \qquad S_y\left(0 \;\middle|\; \frac{1}{3}\right)$$

2.) Gebrochen-rationale Funktion 2

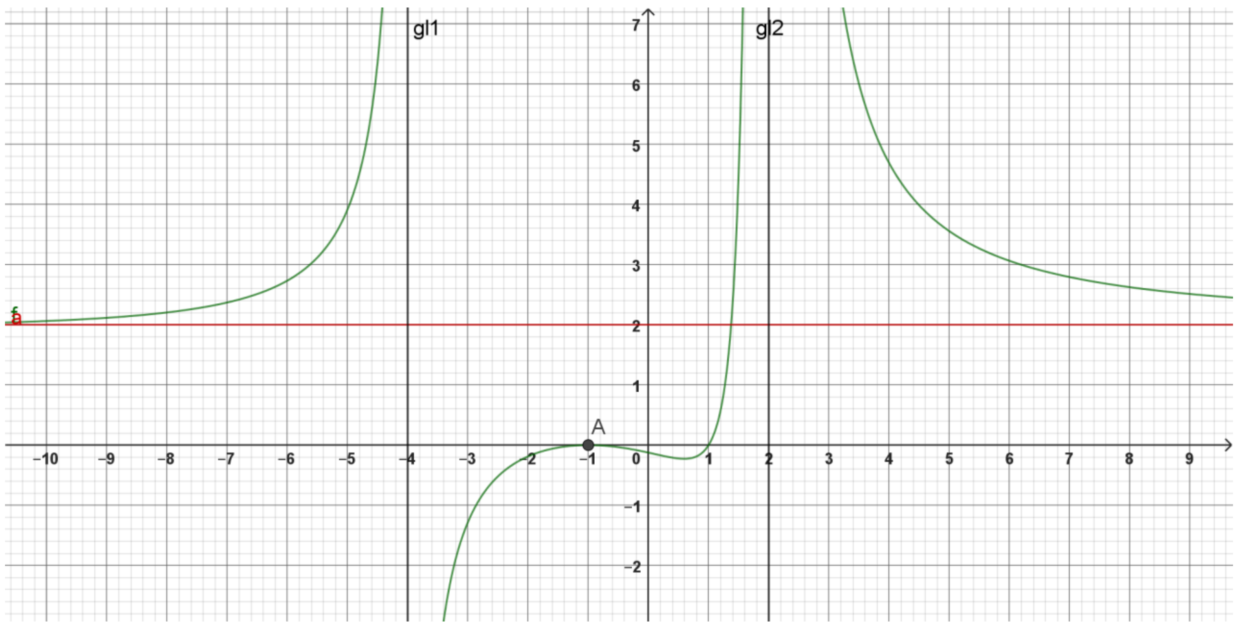
Nach einer Untersuchung einer gebrochen-rationalen Funktion sind folgende Ergebnisse herausgekommen:

Asymptote: $a(x) = 2$

Nullstellen: x = -1 (doppelt) und x = 1 (einfach) Sy(0 / -0,125)

Polstelle mit VZW bei x = -4 **Polstelle ohne VZW bei x = 2**

Skizzieren Sie den Graphen der Funktion, die Polstellen und die Asymptote.

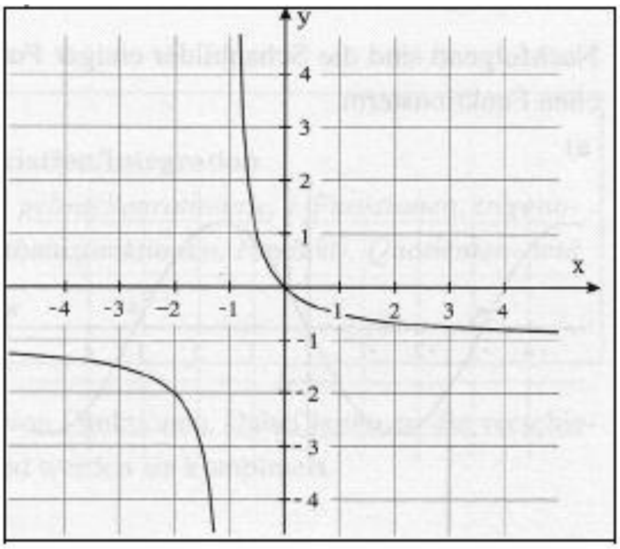


3.) Gebrochen-rationale Funktion 3

Gegeben sei der Graph einer gebrochen-rationalen Funktion.

Bestimmen Sie die Eigenschaften anhand des Graphen und
erstellen Sie die zugehörige Funktionsvorschrift.

a) Asymptote
b) Nullstellen
c) Polstellen der Funktion
d) Schnittpunkt mit der y-Achse
e) Funktionsvorschrift:



Lösung:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Nullstellen:} & x=0 & \text{Polstellen mit VZW:} & x=-1 \\ \text{Asymptote:} & a(x)=-1 \quad D=\Re\setminus\{-1\} & & S_y(0\mid 0) \end{array}\right\} \rightarrow f(x) = \frac{-x}{x+1}$$

4.) Asymptoten bestimmen

Geben Sie die Asymptoten der Funktionen an (bitte mit Begründung!):

(a) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^3+8x}$ **Asymptote: a(x) = 0 (x-Achse)**

(b) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+8x}$ **Asymptote: a(x) = 1 (Parallele zur x-Achse)**

(c) $f(x)=\dfrac{x^3+8x}{x^2-4}$ **Asymptote: a(x) = x (Polynomdivision)**

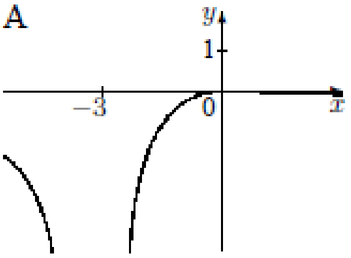
5.) Zuordnung

Ordnen Sie den Graphen die Funktionsvorschriften zu – bitte mit Begründung!

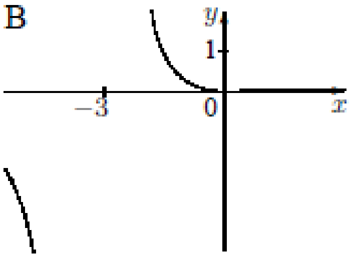
(a) $f_1(x)=\dfrac{-x^2}{3x^2+18x+27}$ (b) $f_2(x)=\dfrac{x^2}{(x+3)^3}$ (c) $f_3(x)=\dfrac{4-x^2}{x^3+27}$

Ordnen Sie die folgenden Graphen diesen drei Funktionstermen zu:

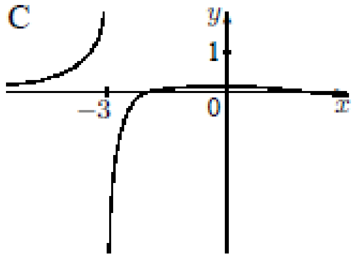
A



B



C



Lösung:

A (a) $f_1(x)$

=> **Polstelle mit VZW an der Stelle x = -3 (doppelte Nennernullstelle)**

=> **doppelte Nullstelle bei x = 0**

=> **Sy(0 / 0)**

B (b) $f_2(x)$

=> **Polstelle ohne VZW an der Stelle x = -3 (dreifache Nennernullstelle)**

=> **doppelte Nullstelle bei x = 0**

=> **Sy(0 / 0)**

C (c) $f_3(x)$

=> **Polstelle ohne VZW an der Stelle x = -3 (einfache Nennernullstelle)**

=> **Nullstelle bei x = +/- 2**

=> $S_y\left(0 \,\middle|\, \frac{4}{27}\right)$

6.) Definitionsbereich bestimmen

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich der drei Funktionen:

(a) $f(x) = \frac{1}{x(x-5)}$ (b) $f(x) = \frac{7x-3}{8x-5}$ (c) $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2} + 7x$

Lösung:

$a) \quad D = \Re \setminus \{0;5\}$ $b) \quad D = \Re \setminus \left\{\frac{5}{8}\right\}$ $c) \quad D = \Re \setminus \{1\}$

7.) Funktionsvorschrift einer gebrochen-rationalen Funktion

Erstellen Sie aus den gegebenen Eigenschaften die ***Funktionsvorschrift***
der gesuchten Funktion:
Das Schaubild einer gebrochen-rationalen Funktion hat eine Polstelle mit VZW bei x = 1,
eine Gerade mit der Gleichung y = 4 ist die waagrechte Asymptote
und der Punkt P(2/6) liegt auf der Kurve.

Lösung:

$$f(x) = \frac{4x+a}{x-1} \quad \rightarrow \quad f(2) = \frac{4\cdot 2+a}{2-1} = 6 \quad \rightarrow \quad a = -2 \quad \rightarrow \quad f(x) = \frac{4x-2}{x-1}$$

8.) **Beschreibung einer gebrochen-rationalen Funktion**

Geben Sie die Beschreibung der Eigenschaften einer gebrochen-rationalen Funktion exakt an, damit die folgende Funktionsvorschrift eindeutig erstellt werden kann.

$$f(x) \quad = \quad \frac{2(x-2)^2(x-3)}{3(x+2)(x+4)^2}$$

Lösung:

Die gesuchte Funktionsvorschrift der gebrochen-rationalen Funktion hat eine doppelte Nullstelle an der Stelle x = 2 und eine einfach Nullstelle an der Stelle x = 3; die Polstelle mit VZW liegt bei x = -2 und eine Polstelle ohne VZW ist an der Stelle x = -4 zu finden;
die Asymptote ist waagrecht und hat die Form a(x) = $^2/_3$

Zusatzaufgabe: **Polynomdivision**

Führen Sie eine Polynomdivision durch:

a) $\left(2x^3-4x^2+3x-10\right):(x-2)$

Lösung:

$$\left(2x^3-4x^2+3x-10\right):(x-2) \quad = \quad 2x^2+3 \quad + \quad \frac{-4}{x-2}$$

b) $\left(4x^{3n+1}-8x^{2n+1}+3x^n-10\right):\left(x^n-2\right)$

Lösung:

$$\left(4x^{3n+1}-8x^{2n+1}+3x^n-10\right):\left(x^n-2\right) \quad = \quad 4x^{2n+1}+3 \quad + \quad \frac{-4}{x^n-2}$$