11. Jgst.	**5. Test**	**Datum: 06.02.2023**
Klasse: GY 22a	**Fach: Mathematik (Kernfach)**	

Thema: Gebrochen-rationale Funktionen (Untersuchung & Graphen)

Name:	
Punkte:	**Note:**

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

1.) Gebrochen-rationale Funktion 1

Gegeben ist die Funktionsvorschrift $f(x) = \frac{2x^3+16}{(x-4)^2(x-3)}$

Bearbeiten Sie folgende Fragestellungen:

a) Zähler- und Nennernullstellen
b) Nullstellen und Polstellen der Funktion
c) Asymptote
d) Definitionsmenge
e) Schnittpunkt mit der y-Achse

Lösung:

$$Polstellen\ mit\ VZW:\quad x_1 = 3 \quad und \quad Polstellen\ ohne\ VZW: x_2 = 4$$

$$Nullstellen: \quad x = -2 \qquad Asymptote: \quad a(x) = 2 \qquad D = \Re \setminus \{3;4\} \qquad S_y\left(0 \,\middle|\, -\frac{1}{3}\right)$$

2.) Gebrochen-rationale Funktion 2

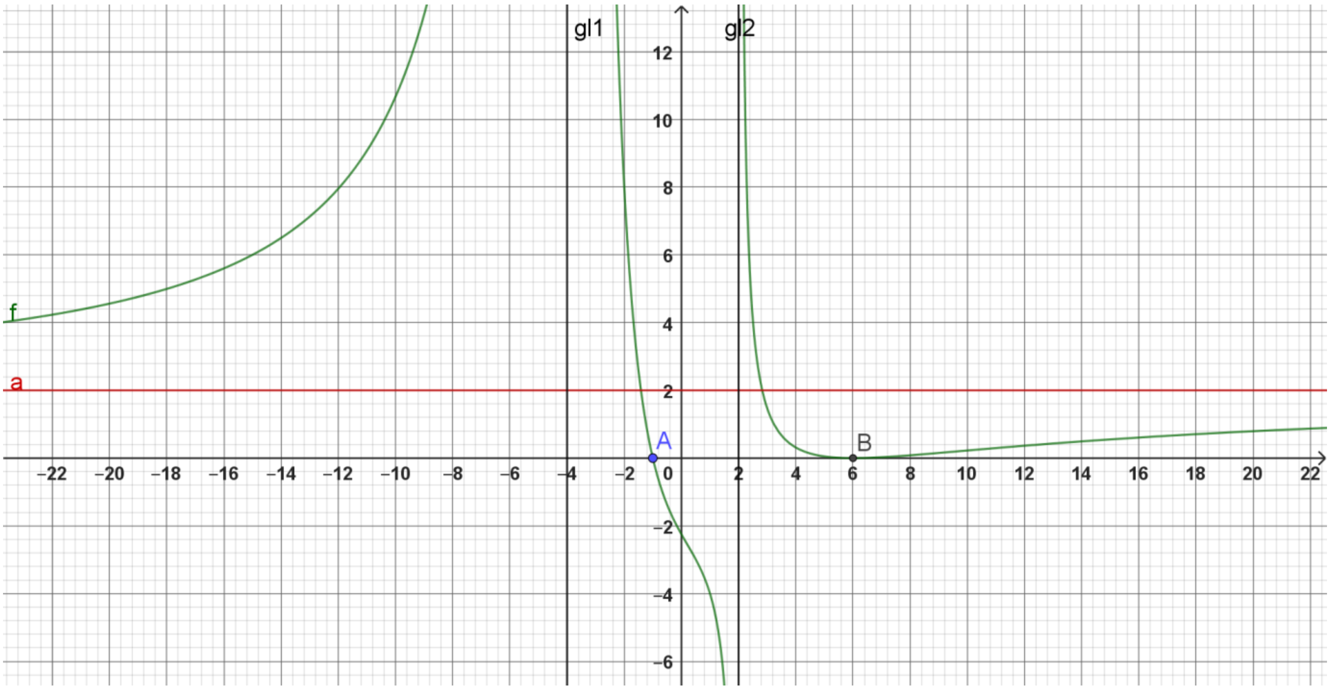
Nach einer Untersuchung einer gebrochen-rationalen Funktion sind folgende Ergebnisse herausgekommen:

Asymptote: $a(x) = 2$

Nullstellen: x = - 1 (einfach) und x = 6 (doppelt) Sy(0 / -2,25)

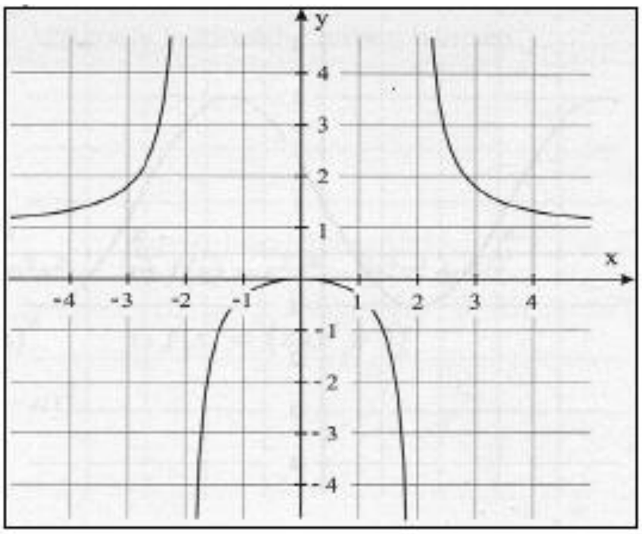
Polstelle mit VZW bei x = 2 **Polstelle ohne VZW bei x = - 4**

Skizzieren Sie den Graphen der Funktion, die Polstellen und die Asymptote.



3.) **Gebrochen-rationale Funktion 3**

Gegeben sei der Graph einer gebrochen-rationalen Funktion.



Bestimmen Sie die Eigenschaften anhand des Graphen und erstellen Sie die zugehörige Funktionsvorschrift.

a) Asymptote
b) Nullstellen
c) Polstellen der Funktion
d) Schnittpunkt mit der y-Achse
e) Funktionsvorschrift:

Lösung:

$$\left.\begin{array}{llll} Nullstellen: & x=0\,[doppelt] & Polstellen\ mit\ VZW: & x=\pm 2 \\ Asymptote: & a(x)=1 \quad D=\Re\setminus\{\pm 2\} & S_y(0\mid 0) & \end{array}\right\} \rightarrow f(x)=\frac{x^2}{(x-2)(x+2)}$$

4.) **Asymptoten bestimmen**

Geben Sie die Asymptoten der Funktionen an (bitte mit Begründung!):

a) $f(x)=\frac{x^3+4x}{x^2-3}$ **Asymptote: a(x) = x (Polynomdivision)**

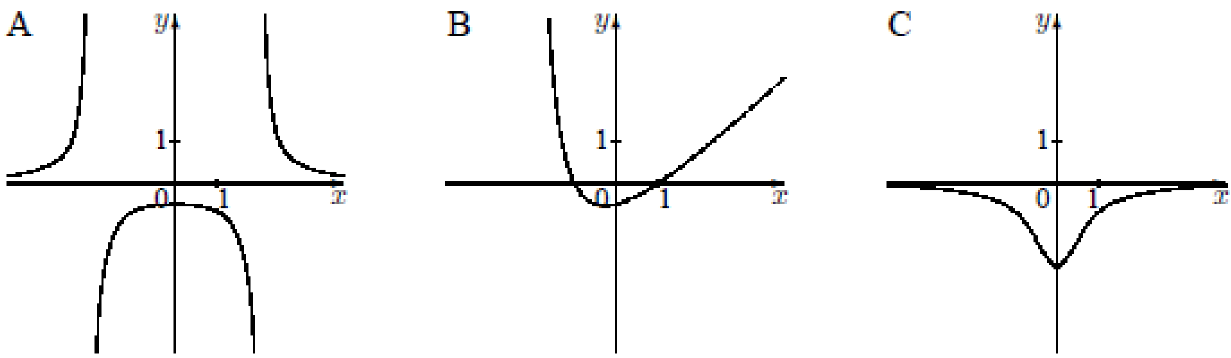
b) $f(x)=\frac{x+4x}{x^2-3}$ **Asymptote: a(x) = 0 (x-Achse)**

c) $f(x)=\frac{5x^2+4x}{2x^2-3}$ **Asymptote: a(x) = 2,5 (Parallele zur x-Achse)**

5.) **Zuordnung**

Ordnen Sie den Funktionstermen die folgenden Graphen zu – bitte mit Begründung!

$$f(x)=-\frac{4}{4x^2+2},\quad g(x)=\frac{2}{x^2-4} \text{ und } h(x)=\frac{x^2-1}{x+2}$$



Lösung:

A g(x)

=> **Polstellen mit VZW an den Stellen x = +/- 2 (einfache Nennernullstellen)**

=> **keine Nullstelle**

=> **Sy(0 / -0,5)** => **Asymptote: a(x) = 0**

B h(x)

=> **Polstelle mit VZW an der Stelle x = -2 (einfache Nennernullstelle)**

=> **zwei Nullstellen bei x = +/- 1**

=> **Sy(0 / -0,5)** => **Asymptote: a(x) = x-2**

C f(x)

=> **keine Polstelle(n)** => **keine Nullstelle**

=> **Sy(0 / -2)** => **Asymptote: a(x) = 0**

6.) Definitionsbereich bestimmen

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich der drei Funktionen:

(a) $f(x) = \frac{1}{x(x-5)}$ (b) $f(x) = \frac{7x-3}{8x-5}$ (c) $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2} + 7x$

Lösung:

$a)\quad D = \Re \setminus \{0;5\}$ $b)\quad D = \Re \setminus \left\{\frac{5}{8}\right\}$ $c)\quad D = \Re \setminus \{1\}$

7.) Funktionsvorschrift einer gebrochen-rationalen Funktion

Erstellen Sie aus den gegebenen Eigenschaften die ***Funktionsvorschrift*** der gesuchten Funktion:
Das Schaubild einer gebrochen-rationalen Funktion hat eine Polstelle mit VZW bei x = 7,
eine Gerade mit der Gleichung y = 3 ist die waagrechte Asymptote
und der Punkt P(8/6) liegt auf der Kurve.

Lösung:

$$f(x) = \frac{3x+a}{x-7} \quad \rightarrow \quad f(8) = \frac{3\cdot 8+a}{8-7} = 6 \quad \rightarrow \quad a = -18 \quad \rightarrow \quad f(x) = \frac{3x-18}{x-7}$$

8.) Beschreibung einer gebrochen-rationalen Funktion

Geben Sie die Beschreibung der Eigenschaften einer gebrochen-rationalen Funktion exakt an, damit die folgende Funktionsvorschrift eindeutig erstellt werden kann.

$$f(x) = \frac{7(x-2)(x-3)^2}{2(x+2)^2(x+4)}$$

Lösung:

Die gesuchte Funktionsvorschrift der gebrochen-rationalen Funktion hat eine doppelte Null-stelle an der Stelle x = 3 und eine einfach Nullstelle an der Stelle x = 2; die Polstelle mit VZW liegt bei x = -4 und eine Polstelle ohne VZW ist an der Stelle x = -2 zu finden;
die Asymptote ist waagrecht und hat die Form a(x) = 3,5 .

Zusatzaufgabe: **Polynomdivision**

Führen Sie eine Polynomdivision durch:

a) $\left(2x^3 - 4x^2 + 3x - 10\right) : (x-2)$

Lösung:

$$\left(2x^3 - 4x^2 + 3x - 10\right) : (x-2) = 2x^2 + 3 + \frac{-4}{x-2}$$

b) $\left(4x^{3n+1} - 8x^{2n+1} + 3x^n - 10\right) : \left(x^n - 2\right)$

Lösung:

$$\left(4x^{3n+1} - 8x^{2n+1} + 3x^n - 10\right) : \left(x^n - 2\right) = 4x^{2n+1} + 3 + \frac{-4}{x^n - 2}$$