11. Jgst.	6. Test	Datum: 22.03.2023
Klasse: GY 22a	Fach: Mathematik (Kernfach)	

Thema: Differenzen- & Differenzialquotient; Steigung; Ableitung

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

1.) Ableitungen bestimmen **18**

Bilden Sie die erste Ableitung der jeweiligen Funktionen:

a) $f(x) = \frac{1}{500}x^{1.000} - \frac{1}{50}x^{100} \rightarrow f'(x) = 2x^{999} - 2x^{99}$

b) $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 1 \rightarrow f'(x) = 12x^2 - 12x + 2$

c) $f(x) = (x+2)(3x-4) = 3x^2 + 2x - 8$

$f'(x) = 6x + 2$

d) $f(x) = 2x^{n+1} - 5x^n \rightarrow f'(x) = 2(n+1)x^n - 5nx^{n-1}$

e) $f(x) = 4t^2x^2 + 2x^4 - 7t^3 \rightarrow f'(x) = 8t^2x + 8x^3$

f) $f(t) = 4t^2x^2 + 2x^4 - 7t^3 \rightarrow f'(t) = 8tx^2 - 21t^2$

2.) Pascalsches Dreieck **14**

a) Erklären Sie die Bildung und Entwicklung der Koeffizienten und stellen Sie die ersten 6 Zeilen dar.

Das Pascalsche Dreieck - Zahlenwerte

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

Die Koeffizienten der Folgezeile bilden sich als Summe der benachbarten Ziffern aus der darüberliegenden Zeile

b) Wie lautet der Ausdruck $(x+3)^5$ in ausmultiplizierter Form?

$$(x+3)^5 = 1\cdot x^5 + 5x^4\cdot 3 + 10x^3\cdot 3^2 + 10x^2\cdot 3^3 + 5x\cdot 3^4 + 1\cdot 3^5$$

$$(x+3)^5 = x^5 + 15x^4 + 90x^3 + 270x^2 + 405x + 243$$

3.) Differenzenquotient

12	

a) Berechnen Sie den Differenzenquotient bei x = 4 bei der Funktion $f(x)=\frac{1}{4}x^3$ und bestimmen Sie den Wert der Steigung an der Stelle x = 4.

x	**6**	**5**	**4,1**	**4,01**
$f(x) = \frac{1}{4}x^3$	$f(6)=54$	$f(5)=\frac{125}{4}$	$f(4{,}1)=17{,}23$	$f(4{,}01)=16{,}12$
m_{Sek}	$\frac{54-16}{2}$ $=19$	$\frac{31{,}25-16}{1}$ $=15{,}25$	$\frac{17{,}23-16}{0{,}1}$ $=12{,}3$	$\frac{16{,}12-16}{0{,}01}$ $=12$

Steigung: $f(x)=\frac{1}{4}x^3 \rightarrow f'(x)=\frac{3}{4}x^2=m \xrightarrow{x=4} f'(4)=12=m$

b) Für welche beiden Werte von x hat die Funktion f(x) die Steigung m = 27?

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3 \rightarrow f'(x)=\frac{3}{4}x^2=m$$

$$\rightarrow f'(x)=\frac{3}{4}x^2=27 \rightarrow x^2=36 \rightarrow x=\pm 6$$

4.) **Fragen über Fragen ...** 16

a) Warum besitzt die 1. Ableitung der Funktion $f(x) = 4$ den Wert 0?

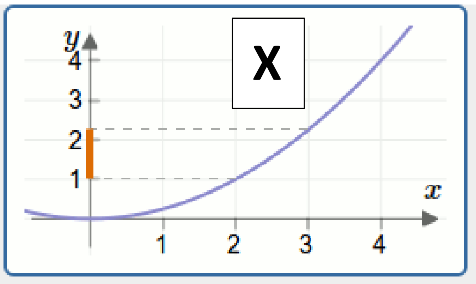
$$f(x) = 4 = 4x^0 \rightarrow f'(x) = 4 \cdot 0 \cdot x^{-1} = 0 = m$$

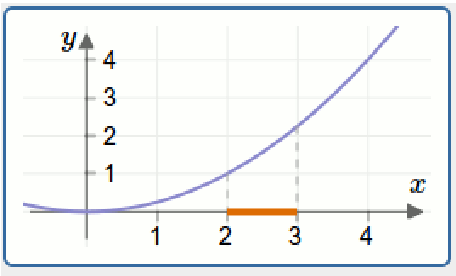
Die Funktion ist eine Konstante (Gerade) mit der Steigung m = 0.

b) Beantworten Sie die nachfolgenden Fragen:

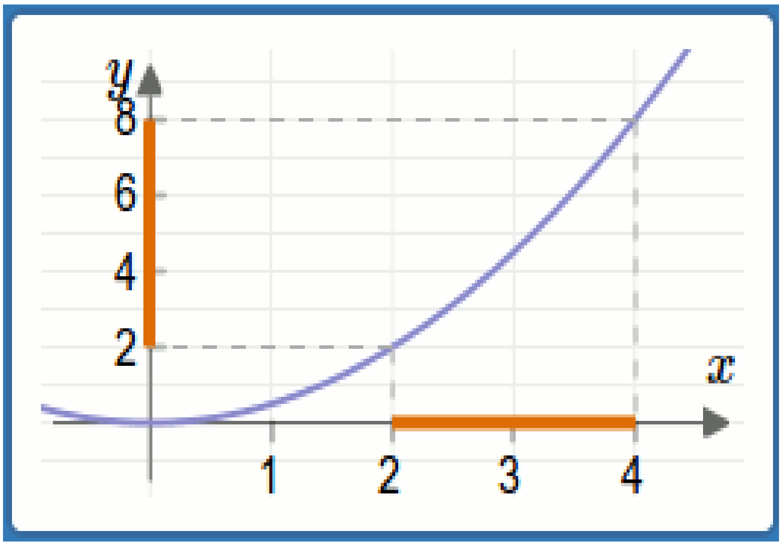
(i) Welche Läge stellt die Differenz $\Delta f = f(3) - f(2)$ dar?

Kreuzen Sie die korrekte Graphik an:





(ii) Wie lautet die durchschnittliche Steigung der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ im Bereich zwischen x = 2 und x = 4?



$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 \rightarrow f(2) = 2 \quad und \quad f(4) = 8 \rightarrow m = \frac{8-2}{4-2} = 3$$

(iii) Erklären Sie mittels des Bildes oben bei (ii) die Idee der Ableitung mit dem Differentialquotient.

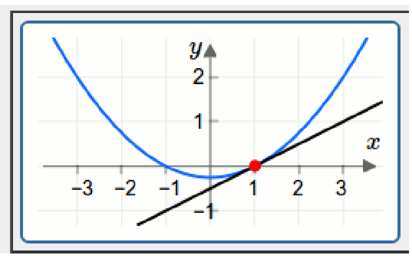
Differentialquotient:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

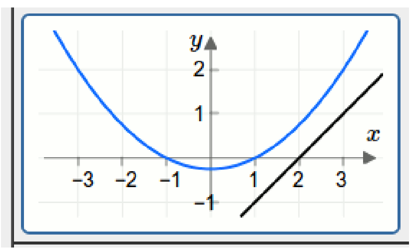
Der Punkt B(4/8) bewegt sich auf den Punkt A(2/2) zu; in diesem Zusammenhang wird der Nenner des Differenzenquotienten immer kleiner und strebt gegen den Wert 0.
Daher wird im Rahmen eines Grenzwertübergangs aus der Sekantensteigung die Tangentensteigung und damit die 1. Ableitung als Wert der Momentanveränderung berechnet.

(iv) Ordnen Sie die Geraden in den Graphiken den korrekten Bezeichnungen zu:

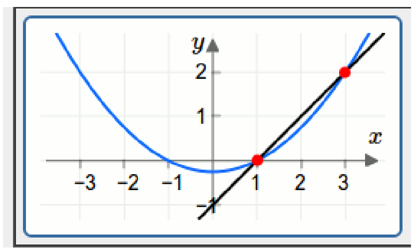
Sekante – Tangente - Passante



TANGENTE



PASSANTE



SEKANTE