

Thema: Kurvendiskussion; Monotonie(Intervalle);  
Steigung; Ableitung

Name:

Punkte:

Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

## 1.) Ableitungen bestimmen

42

Bilden Sie die **ersten beiden Ableitungen** der jeweiligen Funktionen:

a)  $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 2x$

b)  $f(x) = \frac{2}{x^4}$

c)  $f(x) = (x+2)(3x-4)$

d)  $f(x) = 3x^n - 4x^{n-1}$

e)  $f(x) = x^{0,4}$

f)  $f(x) = \sqrt{x^5}$

g)  $f(x) = \frac{x^5 - 2x^3}{x^4}$

Lösung:

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 2 \quad \text{und} \quad f''(x) = 3x - \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{2}{x^4} = 2x^{-4} \quad f'(x) = -8x^{-5} = \frac{-8}{x^5} \quad f''(x) = 40x^{-6} = \frac{40}{x^6}$$

$$f(x) = (x+2)(3x-4) = 3x^2 + 2x - 8 \quad f'(x) = 6x + 2 \quad f''(x) = 6$$

$$f(x) = 3x^n - 4x^{n-1}$$

$$f'(x) = 3nx^{n-1} - 4(n-1)x^{n-2} \quad f''(x) = 3n(n-1)x^{n-2} - 4(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

$$f(x) = x^{0,4} \quad f'(x) = 0,4x^{-0,6} \quad f''(x) = -0,24x^{-1,6}$$

$$f(x) = \sqrt{x^5} = x^{2,5} \quad f'(x) = 2,5x^{1,5} \quad f''(x) = 3,75x^{0,5}$$

$$f(x) = \frac{x^5 - 2x^3}{x^4} = x - \frac{2}{x} = x - 2x^{-1} \quad f'(x) = 1 + 2x^{-2} \quad f''(x) = -4x^{-3}$$

2.) Pascalsches Dreieck

10	
----	--

Wie lautet der Ausdruck  $(2x + 4)^6$  in ausmultiplizierter Form?

1   6   15   20   15   6   1

$$(2x + 4)^6 = 1 \cdot (2x)^6 + 6 \cdot (2x)^5 \cdot 4 + 15 \cdot (2x)^4 \cdot 4^2 \\ + 20 \cdot (2x)^3 \cdot 4^3 + 15 \cdot (2x)^2 \cdot 4^4 + 6 \cdot 2x \cdot 4^5 + 1 \cdot 4^6$$

$$(2x + 4)^6 = 64x^6 + 768x^5 + 3.840x^4 + 10.240x^3 + 15.360x^2 + 12.288x + 4.096$$

3.) Kurvenuntersuchung

20	
----	--

Gegeben sei die Funktion mit der Funktionsvorschrift

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}$$

Bestimmen Sie

- (i) das Symmetrieverhalten,
- (ii) die Nullstellen,
- (iii) die Extremwerte,
- (iv) und die Monotonieintervalle

Symmetrie: Keine wegen ungerader und gerade Exponenten

Nullstellen:  $(-x^2 + 6x - 9)x = 0 \rightarrow x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = 3[\text{doppelt}]$

Extrema:

$$f'(x) = -3x^2 + 12x - 9 = 0 \rightarrow x_1 = 3 \quad \text{und} \quad x_2 = 1$$

$$f''(x) = -6x + 12$$

$$\rightarrow f''(3) = -6 \cdot 3 + 12 = -6 < 0 \quad \text{MAX}(3 | 0)$$

$$\rightarrow f''(1) = -6 \cdot 1 + 12 = 6 > 0 \quad \text{MIN}(1 | -4)$$

Monotonieintervalle:

$$I_1 = ]-\infty; 1[ \quad \text{monoton fallend} \quad I_2 = ]1; 3[ \quad \text{monoton steigend}$$

$$I_3 = ]3; \infty[ \quad \text{monoton fallend}$$

4.) Ableitungen

5	
---	--

Wie lautet der Wert von  $k$ , damit die angegebene Bedingung erfüllt ist?

$$f(x) = kx^2 - 4x + 7 \quad \text{und} \quad f'(3) = 8$$

$$f'(x) = 2kx - 4 \rightarrow f'(3) = 2k \cdot 3 - 4 = 6k - 4 = 8 \rightarrow k = 2$$

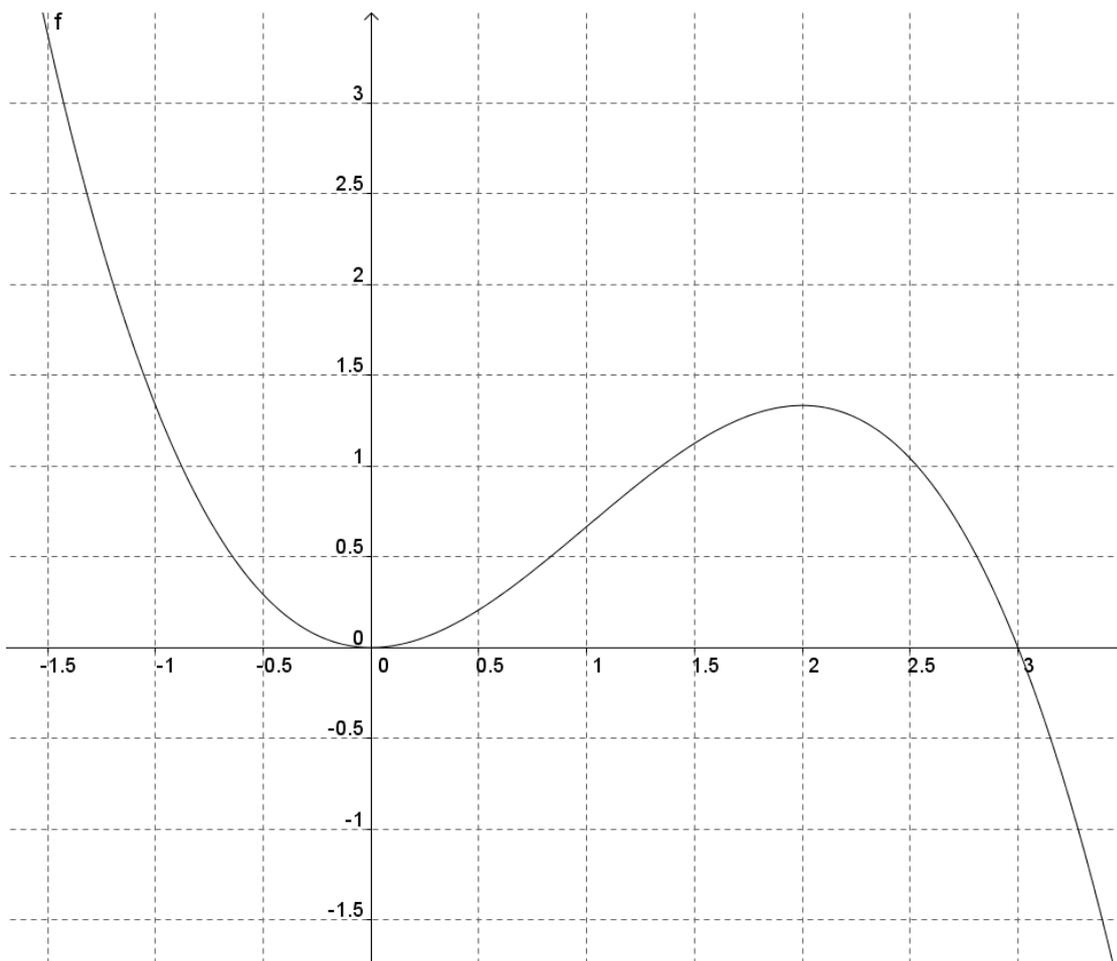
5.) Monotonie

14	
----	--

- a) Welche Bedingung muss vorliegen, damit eine Funktion als **monoton fallend** bezeichnet wird?

**Der Wert der ersten Ableitung muss kleiner als 0 sein, da die erste Ableitung einer Funktion deren Steigungsverhalten beschreibt.**

- b) Bestimmen Sie die **Monotonieintervalle** **und** das **Monotonieverhalten** des Graphen:



$$I_1 = ]-\infty; 0[ \quad \text{monoton fallend}$$

$$I_2 = ]0; 2[ \quad \text{monoton steigend}$$

$$I_3 = ]2; \infty[ \quad \text{monoton fallend}$$

6.) **Mathematisches Erklären und Begründen**

- a) Wie viele Extremwerte kann eine ganzrationale Funktion vom Grad  $n = 4$  maximal haben?

Sie kann maximal 3 Extrema haben, da der Grad der ersten Ableitung um 1 kleiner ist als der Grad der Ausgangsfunktion.

- b) Was ist die **notwendige** und was versteht man unter der **hinreichenden** Bedingung für einen Extremwert?

Notwendig:  $f'(x) = 0$

Hinreichend: Notwendige Bedingung +  $f''(x) \neq 0$

- c) Ist die Ableitung einer Funktion überall **3**, so ist die Funktion notwendigerweise
- |                          |                   |                                     |                |
|--------------------------|-------------------|-------------------------------------|----------------|
| <input type="checkbox"/> | eine Parabel.     | <input type="checkbox"/>            | konstant.      |
| <input type="checkbox"/> | selbst auch Null. | <input checked="" type="checkbox"/> | <b>linear.</b> |