11. Jgst.	7. Test (GRUPPE B)	Datum: 12.05.2023
Klasse: GY 22a	Fach: Mathematik (Kernfach)	

Thema: Kurvendiskussion; Monotonie(Intervalle); Steigung; Ableitung

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Name:	
Punkte:	Note:

1.) Ableitungen bestimmen | 42 | |

Bilden Sie die **ersten beiden Ableitungen** der jeweiligen Funktionen:

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^2 + 4x$

b) $f(x) = \frac{1}{x^6}$

c) $f(x) = (2x+3)(x-5)$

d) $f(x) = 2x^{n+1} - 5x^n$

e) $f(x) = x^{0,8}$

f) $f(x) = \sqrt{x^3}$

g) $f(x) = \frac{x^3 - 2x}{x^2}$

$f'(x) = x^3 - \frac{2}{3}x + 4 \qquad f''(x) = 3x^2 - \frac{2}{3}$

$f(x) = \frac{1}{x^6} = x^{-6} \qquad f'(x) = -6x^{-7} = \frac{-6}{x^7} \qquad f''(x) = 42x^{-8} = \frac{42}{x^8}$

$f(x) = (2x+3)(x-5) = 2x^2 - 7x - 15 \qquad f'(x) = 4x - 7 \qquad f''(x) = 4$

$f(x) = 2x^{n+1} - 5x^n$

$\rightarrow \quad f'(x) = 2(n+1)x^n - 5nx^{n-1} \qquad f''(x) = 2n(n+1)x^{n-1} - 5n(n-1)x^{n-2}$

$f(x) = x^{0,8} \qquad f'(x) = 0,8x^{-0,2} \qquad f''(x) = -0,16x^{-1,2}$

$f(x) = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}} = x^{1,5} \qquad f'(x) = 1,5x^{0,5} \qquad f''(x) = 0,75x^{-0,5}$

$f(x) = \frac{x^3 - 2x}{x^2} = x - \frac{2}{x} = x - 2x^{-1} \quad \rightarrow \quad f'(x) = 1 + 2x^{-2} \qquad f''(x) = -4x^{-3} = \frac{-4}{x^3}$

2.) **Pascalsches Dreieck** | 10 | |

Wie lautet der Ausdruck $(3x+2)^6$ in ausmultiplizierter Form?

1	**6**	**15**	**20**	**15**	**6**	**1**

$$(3x+2)^6 = 1\cdot(3x)^6 + 6\cdot(3x)^5\cdot 2 + 15\cdot(3x)^4\cdot 2^2$$
$$+20\cdot(3x)^3\cdot 2^3 + 15\cdot(3x)^2\cdot 2^4 + 6\cdot 3x\cdot 2^5 + 1\cdot 2^6$$
$$(3x+2)^6 = 729x^6 + 2.916x^5 + 4.860x^4 + 4.320x^3 + 2.160x^2 + 576x + 64$$

3.) **Kurvenuntersuchung** | 20 | |

Gegeben sei die Funktion mit der Funktionsvorschrift

$$f(x) \quad = \quad -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 \quad mit \quad x \in \Re$$

Bestimmen Sie

(i) das Symmetrieverhalten, (ii) die Nullstellen,
(iii) die Extremwerte, (iv) und die Monotonieintervalle

Symmetrie: Keine wegen ungerader und gerade Exponenten

Nullstellen: $\left(-\frac{1}{6}x + \frac{1}{4}\right)x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0\left[doppelt\right] \quad und \quad x_2 = \frac{3}{2}$

Extrema:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)x = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0 \quad und \quad x_2 = 1$$
$$f''(x) = -x + 0,5$$
$$\rightarrow \quad f''(0) = 0 + 0,5 = 0,5 > 0 \quad MIN\left(0 \mid 0\right)$$
$$\rightarrow \quad f''(1) = -1 + 0,5 = -0,5 < 0 \quad MAX\left(1 \,\middle|\, \frac{1}{12}\right)$$

Monotonieintervalle:

$I_1 = \left]-\infty\,;0\right[\quad monoton\ fallend \qquad I_2 = \left]0\,;1\right[\quad monoton\ steigend$

$I_3 = \left]1\,;\infty\right[\quad monoton\ fallend$

4.) **Ableitungen** | 5 | |

Wie lautet der Wert von a, damit die angegebene Bedingung erfüllt ist?

$$f(x) \quad = \quad ax^2 + 2x - 3 \qquad und \qquad f'(2) \quad = \quad -6$$

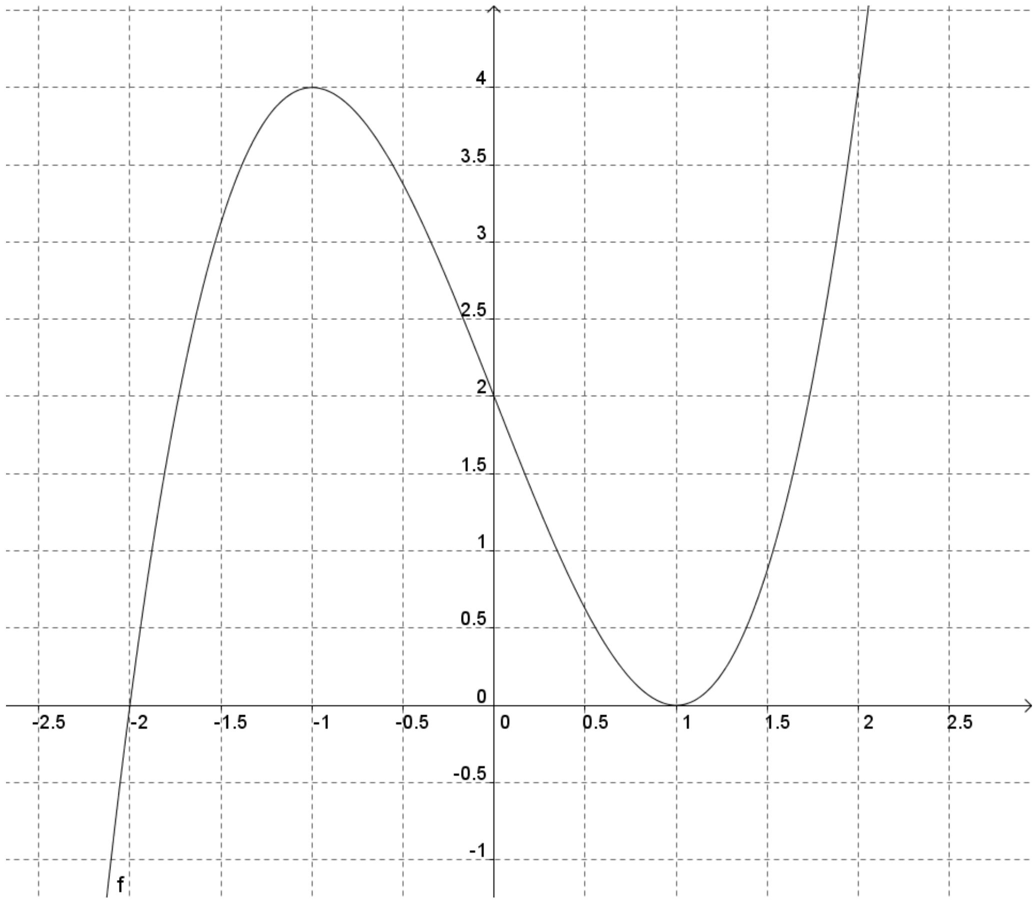
$$f'(x) = 2ax + 2 \quad \rightarrow \quad f'(2) = 2a \cdot 2 + 2 = 4a + 2 = -6 \quad \rightarrow \quad a = -2$$

5.) **Monotonie** | 14 | |

a) Welche Bedingung muss vorliegen, damit eine Funktion als **monoton steigend** bezeichnet wird?

Der Wert der ersten Ableitung muss größer als 0 sein, da die erste Ableitung einer Funktion deren Steigungsverhalten beschreibt.

b) Bestimmen Sie die **Monotonieintervalle** **und** **das Monotonie-verhalten** des Graphen:



$I_1 =]-\infty\,; -1[\quad monoton\ steigend \qquad\qquad I_2 =]-1\,; 1[\quad monoton\ fallend$

$I_3 =]1\,; \infty[\quad monoton\ steigend$

9	

6.) Mathematisches Erklären und Begründen

a) Wie viele Extremwerte **kann** eine ganzrationale Funktion vom Grad n = 3 maximal haben?

Sie kann maximal 2 Extrema haben, da der Grad der ersten Ableitung um 1 kleiner ist als der Grad der Ausgangsfunktion.

b) Was ist ein Sattelpunkt und welche Bedingungen müssen vorliegen?

Unter einem Sattelpunkt versteht man eine Stelle, an der die Funktion die Steigung 0 besitzt, aber kein Extremum sondern einen Wendepunkt hat;
Also einen Wendepunkt mit der Steigung m = 0
Bedingungen: f'(x) = f''(x) = 0

c) Ist die Ableitung einer Funktion überall **Null**, so ist die Funktion **notwendigerweise**

☐ eine Parabel. **X konstant.**
☐ selbst auch Null. ☐ linear.