11. Jgst.	**2. Klassenarbeit**	**Datum: 19.12.2023**
Klasse: GY 23a	**Fach: Mathematik (Kernfach)**	

Thema: Ganzrationale Funktionen Grad n; Horner-Schema; Nullstellen

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Name:	
Punkte:	Note:

1.) Ganzrationale Funktionen - Koeffizienten

Eine ganzrationale Funktion sei durch folgende Koeffizienten gegeben:

$a_8 = -2$ $a_6 = -5$ $a_5 = a_3 = -4$ $a_2 = a_1 = a_0 = 3$

Erstellen Sie die Funktionsvorschrift und geben Sie den Grad der Funktion an.

$$f(x) = -2x^8 - 5x^6 - 4x^5 - 4x^3 + 3x^2 + 3x + 3 \qquad Grad: n = 8$$

2.) Rekonstruktion ganzrationaler Funktionen (Grundstruktur)

Ermitteln Sie die Funktionsvorschrift der ganzrationalen Funktionen aufgrund der gegebenen Eigenschaften in der Linearfaktordarstellung

Funktion 1: Grad 4; Nullstelle x = -3, Nullstelle x = 4 (dreifach) und P(3/12)

$$f(x) = c(x+3)\cdot(x-4)^3 \xrightarrow{P(3\,|\,12)} c\cdot 6\cdot(-1)^3 = 12 \rightarrow c = \frac{12}{-6} = -2$$

$$f(x) = (-2)\cdot(x+3)\cdot(x-4)^3$$

Funktion 2: Grad 5; Nullstelle x = -1 (vierfach); Nullstelle x = 2 und P(-2/16)

$$f(x) = c(x+1)^4\cdot(x-2) \xrightarrow{P(-2\,|\,16)} c\cdot(-1)^4\cdot(-4) = 16$$

$$\rightarrow c\cdot(-4) = 16 \rightarrow c = \frac{16}{-4} = -4 \rightarrow f(x) = (-4)\cdot(x+1)^4\cdot(x-2)$$

3.) Horner-Schema

a) Bestimmen Sie den Funktionswert der Funktion

$f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 5x + 6$ an der Stelle **x = -2**

mit dem Horner-Schema.

LÖSUNG:

	2	- 4	3	- 5	6
x = - 2		- 4	16	- 38	86
	2	- 8	19	- 43	92

b) Bestimmen Sie den Funktionswert der Funktion

$g(x) = -x^5 + 5x^3 - 2x^2$ an der Stelle x = 3

mit dem Horner-Schema.

LÖSUNG:

	- 1	0	5	- 2	0	0
x = 3		- 3	- 9	- 12	- 42	- 126
	- 1	- 3	- 4	- 14	- 42	- 126

c) Oh je – hier soll das Horner-Schema verwendet werden, aber leider fehlen ein paar Koeffizienten.

Bitte vervollständigen Sie das Schema und führen Sie die Berechnungen durch.

LÖSUNG:

Wert Koeffizient	- 5	6	a_1 = 11	a_0 = - 4
x = 2		- 10	- 8	6
Ergebnis	- 5	- 4	3	2

4.) Nullstellen berechnen

Bestimmen Sie die Nullstellen folgender Funktionen

a) $f(x) = x^3 - 16x$

LÖSUNG: $f(x) = (x^2 - 16)x = 0 \rightarrow x_1 = 0 \;\; und \;\; x_{2/3} = \pm 4$

b) $f(x) = 2(x-4)(x^2 + 2x - 3)$

LÖSUNG:

$$f(x) = 2(x-4)(x^2+2x-3) = 0 \rightarrow (x-4) = 0 \wedge (x^2+2x-3) = 0$$

$$\rightarrow x = 4 \wedge |x| = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2 \rightarrow x = 1 \wedge x = -3$$

c) $f(x) = 10x^5 - 40x^4 + 10x^3 + 60x^2$

LÖSUNG:

$$f(x) = (10x^3 - 40x^2 + 10x + 60)x^2 = 0 \rightarrow x = 0[doppelt]$$

$Horner - Schema:$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 10 & -40 & 10 & 60 \\ \hline x=-1 & & -10 & 50 & -60 \\ \hline & 10 & -50 & 60 & 0 \end{array} \rightarrow x = -1 \rightarrow$$

$$10x^2 - 50x + 60 = 0$$

$$\xrightarrow{:10} x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$|x| = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow x = 3 \rightarrow x = 2$$

d) $$f(x) = x^3 - 5x^2 - 19x + 5x^2 + 30$$

LÖSUNG:

$$\rightarrow \quad f(x) = x^3 - 19x + 30$$

Horner – Schema:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -19 & 30 \\ \hline x=2 & & 2 & 4 & -30 \\ \hline & 1 & 2 & -15 & 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad {\color{red} x=2} \quad \rightarrow \quad x^2 + 2x - 15 = 0 \xrightarrow{abc-Formel} |x| = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2}$$

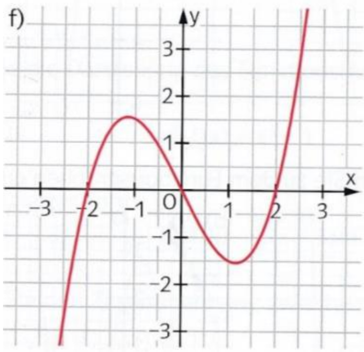
$$\rightarrow \quad {\color{red} x = -5} \quad \rightarrow \quad {\color{red} x = 3}$$

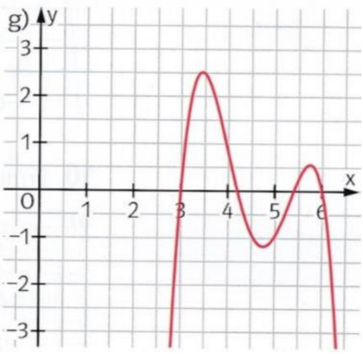
e)

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1
y	1,75	0	0	−0,5	−2,25	−4,5	−5	0	15,75

LÖSUNG:

Nullstellen sind die x-Werte, bei denen der y-Wert y = 0 gilt: x=-2,5; x = -2 und x = 0,5





LÖSUNG:

x = -2; x = 0 und x = 2

LÖSUNG:

x = 3 ; x = 4,2 ; x = 5,4 und x = 6

Lösen Sie die Gleichung mit Hilfe einer geeigneten Substitution und vergleichen Sie die möglichen Lösungen am Rand:

$1 \quad -2 \quad -4 \quad -1 \quad 3\tfrac{2}{3} \quad 1 \quad -1 \quad -4 \quad 1 \quad -3 \quad 3 \quad \sqrt{6} \quad 2 \quad 4 \quad 4 \quad -\sqrt{6}$

(i) $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$

LÖSUNG:

$$x^4 - 20x^2 + 64 = 0 \xrightarrow[u=x^2]{Substitution} u^2 - 20u + 64 = 0$$

$$\rightarrow \quad u_{1/2} = \frac{20 \pm \sqrt{400-256}}{2} = \frac{20 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{20 \pm 12}{2} \quad \rightarrow \quad u_1 = 16 \quad und \quad u_2 = 4$$

$$\rightarrow \quad u_1 = x^2 = 16 \quad \rightarrow \quad x_{1/2} = \pm 4 \quad und \quad u_2 = x^2 = 4 \quad \rightarrow \quad x_{3/4} = \pm 2$$

(ii) $2x^4 - 90 - 8x^2 \;=\; 0$

LÖSUNG:

$$2x^4 - 90 - 8x^2 \;=\; 0 \;\rightarrow\; 2x^4 - 8x^2 - 90 \;=\; 0 \;\xrightarrow[u=x^2]{\text{Substitution}}\; 2\left(u^2 - 4u - 45\right) \;=\; 0$$

$$\rightarrow\; u_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+180}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{196}}{2} = \frac{4 \pm 14}{2} \;\rightarrow\; u_1 = 9 \quad und \quad u_2 = -5$$

$$\rightarrow\; u_1 = x^2 = 9 \;\rightarrow\; x_{1/2} = \pm 3 \quad und \quad u_2 = x^2 = -5 \;\rightarrow\; nicht\ definiert$$

(iii) $x^6 - 10x^3 + 9 \;=\; 0$

LÖSUNG:

$$x^6 - 10x^3 + 9 \;=\; 0 \;\xrightarrow[u=x^3]{\text{Substitution}}\; u^2 - 10u + 9 \;=\; 0$$

$$\rightarrow\; u_{1/2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-36}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} \;\rightarrow\; u_1 = 9 \quad und \quad u_2 = 1$$

$$\rightarrow\; u_1 = x^3 = 9 \;\rightarrow\; x_1 = \sqrt[3]{9} \quad und \quad u_2 = x^3 = 1 \;\rightarrow\; x_2 = 1$$

(iv) $x^4 + \frac{4}{9}x^2 - \frac{13}{9} \;=\; 0$

LÖSUNG:

$$x^4 + \frac{4}{9}x^2 - \frac{13}{9} \;=\; 0 \;\xrightarrow[u=x^2]{\text{Substitution}}\; u^2 + \frac{4}{9}u - \frac{13}{9} \;=\; 0 \;\rightarrow\; 9u^2 + 4u - 13 \;=\; 0$$

$$\rightarrow\; u_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+468}}{18} = \frac{-4 \pm \sqrt{484}}{18} = \frac{-4 \pm 22}{18} \;\rightarrow\; u_1 = 1 \quad und \quad u_2 = -\frac{26}{18} = -\frac{13}{9}$$

$$\rightarrow\; u_1 = x^2 = 1 \;\rightarrow\; x_{1/2} = \pm 1 \quad und \quad u_2 = x^2 = -\frac{13}{9} \;\rightarrow\; nicht\ definiert$$

5.) Linearfaktor- und Polynom-/Koeffizientendarstellung

Bestimmen Sie aufgrund der gegebenen Nullstellen die Funktionsvorschrift in der **<u>Linearfaktor- und Polynomschreibweise</u>**.

a) x = 3 x = -1 x = -2

b) x = 9 x = 6 x = 2

LÖSUNG:

$$f(x) \;=\; (x-3)\cdot(x+1)\cdot(x+2)$$
$$f(x) \;=\; \left(x^2 - 2x - 3\right)\cdot(x+2)$$
$$f(x) \;=\; x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x - 3x - 6$$
$$f(x) \;=\; x^3 - 7x - 6$$

LÖSUNG:

$$f(x) \;=\; (x-9)\cdot(x-6)\cdot(x-2)$$
$$f(x) \;=\; \left(x^2 - 15x + 54\right)\cdot(x-2)$$
$$f(x) \;=\; x^3 - 2x^2 - 15x^2 + 30x + 54x - 108$$
$$f(x) \;=\; x^3 - 17x^2 + 84x - 108$$

6.) **Koeffizienten und Grad der Funktion bestimmen**

Geben Sie von der ganzrationalen Funktion den Grad und die Werte der Koeffizienten an:

a) $f(x) = x\cdot\left(x^2-3x+4\right)$

LÖSUNG:

$$f(x) = x\cdot\left(x^2-3x+4\right) = x^3-3x^2+4x \rightarrow Grad: n=3 \quad und \quad a_3=1 \quad a_2=-3 \quad a_1=4 \quad a_0=0$$

b) $f(x) = -8x^4+x^3-2x+5$

LÖSUNG:

$$f(x) = -8x^4+x^3-2x+5 \rightarrow Grad: n=4 \quad und \quad a_4=-8 \quad a_3=1 \quad a_2=0 \quad a_1=-2 \quad a_0=5$$

c) $f(x) = 3\left(x^2+2\right)\cdot\left(x^3-4\right)$

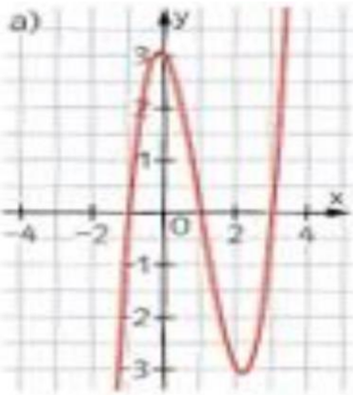
LÖSUNG:

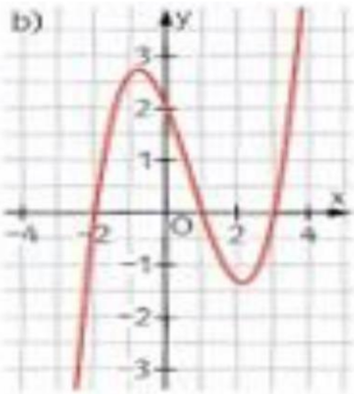
$$f(x) = 3\left(x^2+2\right)\cdot\left(x^3-4\right) = 3x^5+6x^3-12x^2-24$$

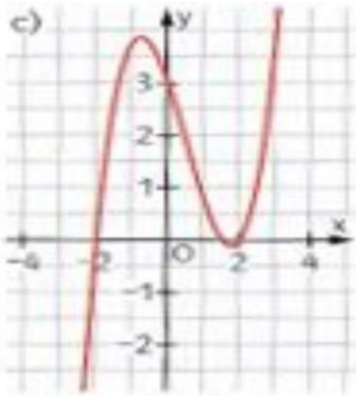
$$\rightarrow Grad: n=5 \quad und \quad a_5=3 \quad a_4=0 \quad a_3=6 \quad a_2=-12 \quad a_1=0 \quad a_0=-24$$

7.) **Linearfaktoren aus dem Graphen bestimmen**

Ermitteln Sie zu den Funktionsgraphen die zugehörigen Linearfaktoren:







$LF: \ (x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-3)$ $\qquad LF: \ (x+2)\cdot(x-1)\cdot(x-3)$ $\qquad LF: \ (x+2)\cdot(x-2)^2$

8.) **Funktionsgleichung bestimmen**

Bestimmen Sie die zugehörige Funktionsgleichung zu den gegebenen Graphen.

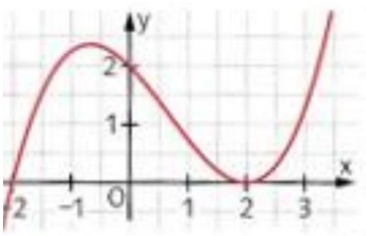


Fig. 1

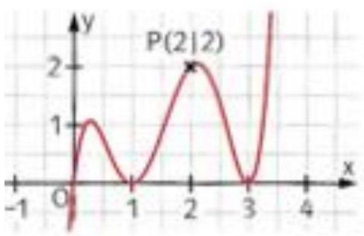


Fig. 3

Lösung Fig. 1

$$f(x) = c\cdot(x+2)\cdot(x-2)^2$$

$$\xrightarrow{P(0\mid 2)} c\cdot 2\cdot 4 = 2 \rightarrow c = \frac{1}{4} \rightarrow f(x) = \frac{1}{4}\cdot(x+2)\cdot(x-2)^2$$

Lösung Fig. 3

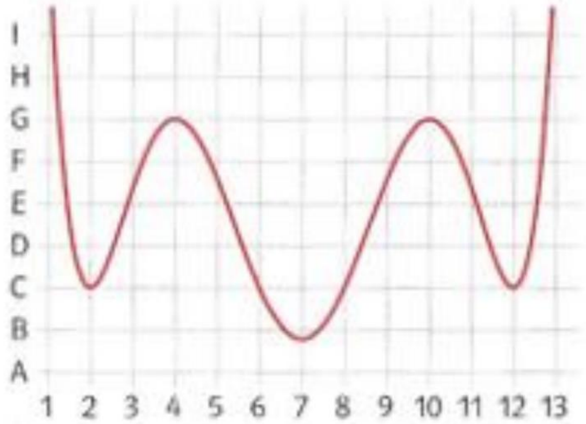
$$f(x) = c\cdot x\cdot(x-1)^2\cdot(x-3)^2$$

$$\xrightarrow{P(2\mid 2)} c\cdot 2\cdot 1\cdot(-1)^2 = 2 \rightarrow c = 1 \rightarrow f(x) = 1\cdot c\cdot x\cdot(x-1)^2\cdot(x-3)^2$$

9.) Koordinatenachsen verloren

Die Figur zeigt einen Graphen, der zur Funktionsgleichung $f(x) = \frac{1}{16}\cdot x\cdot(x+2)^2\cdot(x-1)\cdot(x-3)^2$ passt.

Leider fehlen die zugehörigen Koordinatenachsen. Wo müssen x- und y-Achse eingetragen werden?



Lösung