11. Jgst.	3. Klassenarbeit	Datum: 08.03.2024
Klasse: GY 23 a	Fach: Mathematik (Kernfach)	

Thema: Differentialquotient; Ableitungen
Tangentenberechnung; Pascalsches △

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

1.) Binomischer Lehrsatz und Pascalsches Dreieck **10**

Im Pascalschen Dreieck gilt folgende Gesetzmäßigkeit:

Die Zahlenwerte der n-ten Zeile ergeben als Summe 2^n.

(i) Zeigen Sie dies anhand der Zahlenwerte der 4. Zeile.

(ii) Erklären Sie aufgrund dieser Gesetzmäßigkeit, dass sich die Summe in der jeweils darauffolgenden Zeile verdoppelt und beweisen Sie diese Tatsache.

2.) Ableitungen I **18**

Bilden Sie die erste Ableitung der jeweiligen Funktionen:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{5}x^3$ b) $f(x) = -6x^2 + 3x - 9$

c) $f(x) = (2x+4)(3x^2 - 6x)$ d) $f(x) = x^3(8x^2 - 4x)$

e) $f(x) = 3x^{2n} - 6x^n + 3x$

3.) Ableitungen II **8**

Nun werden die Funktionen etwas kniffliger – bestimmen Sie auch hier die 1. Ableitung:

a) $f(x) = \frac{3}{x^4}$ b) $f(x) = \sqrt[4]{x^5}$

4.) Ableitung mit der h-Methode **8**

Bilden Sie die Ableitungen der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^4$ mittels der h-Methode:

Ansatz: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

5.) **Erklärungen zu Ableitung(en)** 4

Begründen Sie aus analytischer **und** grafischer Sichtweise, warum die Ableitung einer Konstanten wie z.B. $f(x) = 2$ immer den Wert 0 ergibt.

6.) **Steigungen ermitteln** 24

(i) Gegeben sei folgende Funktion: $f(x) \quad = \quad \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2$

a) Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen von f(x).

b) In welchen Punkten hat der Graph der Funktion eine waagrechte Tangente?

(ii) Sei nun die Funktion gegeben mit $f(x) \quad = \quad -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x$

a) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion.

b) Welche Steigung besitzt die Funktion an der Stelle **x = 2**?

c) An welchen Stellen x beträgt die Steigung der Funktion **m = -11**?

7.) **Eigenschaften von Funktionen** 24

Gegeben sei der Graph der Funktion $f(x)$

Beantworten Sie folgende Fragen zum Graphen – bitte jeweils auch kurze Begründung.

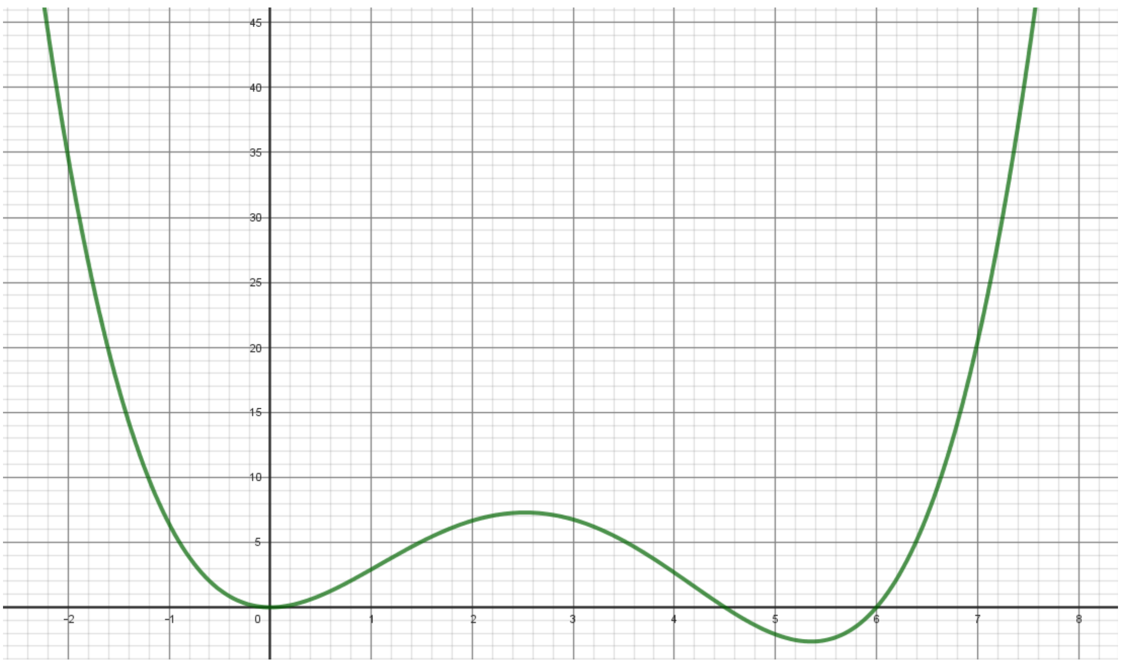
a) An welchen Stellen befinden sich die Hoch- und Tiefpunkte?

b) In welchen Phasen/Intervallen fällt die Funktion?

c) Geben Sie zwei Punkte an, an denen die Funktion monoton steigend verläuft.

d) Welchen Grad besitzt die Funktion.

e) Wie viele Nullstellen besitzt die Funktion?
Bilden Sie hieraus die Funktionsvorschrift als Linearfaktorzerlegung.



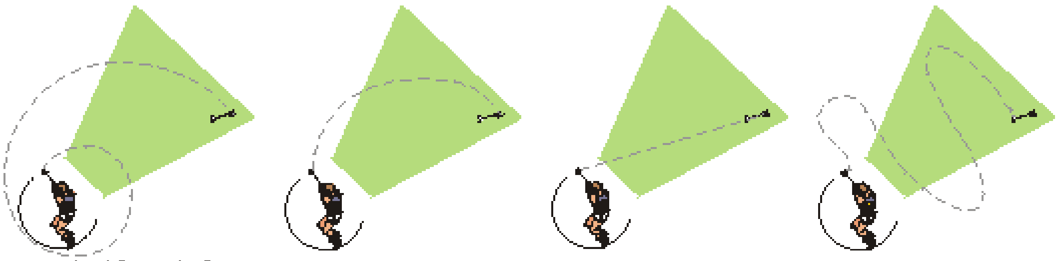
⇨ ***Anmerkung: Auswahl – entweder 8 und 9 ODER (nur) 10***

8.) **Sachaufgabe zu Ableitung(en):** Flugbahn beim Hammerwurf

Welche Flugbahn wird ein Hammer zurücklegen?

4	

Kreuzen Sie die richtige Lösung an und begründen Sie Ihre Meinung aus mathematischer Sicht!



spiralförmig? bogenförmig? geradlinig? willkürlich?

9.) **Differenzierbarkeit und Ableitungsregeln**

8	

Bestimmen Sie durch Ankreuzen jeweils die Ableitungsfunktion $f\,'$ von den Funktionen f.

1	$f(x) = \pi^2$		
☐ $f\,'(x) = 2\,\pi$	☐ $f\,'(x) = \pi$	☐ $f\,'(x) = \pi\,x$	☐ $f\,'(x) = 0$

2	$f(x) = x^{n+1}$		
☐ $f\,'(x) = n\,x^n$	☐ $f\,'(x) = (n+1)\,x^n$	☐ $f\,'(x) = (n-1)\,x^n$	☐ $f\,'(x) = (n+1)\,x^{n-1}$

3	$f(y) = x\,y^{4n}$		
☐ $f\,'(y) = y^{4n}$	☐ $f\,'(y) = 4\,n\,y^{4n}$	☐ $f\,'(y) = 4\,n\,x\,y^{4n-1}$	☐ $f\,'(y) = 4\,n\,x\,y^{3n}$

4	$f(a) = 0{,}4\,a^{10}\,x^4$		
☐ $f\,'(a) = 1{,}6\,a^{10}\,x^3$	☐ $f\,'(a) = 4\,a^9\,x^4$	☐ $f\,'(a) = 4\,a^9\,x^3$	☐ $f\,'(a) = 0{,}4\,a^9\,x^4$

5	$f(a) = y^2\,a^{5n}$		
☐ $f\,'(a) = a^{5n}$	☐ $f\,'(a) = 2\,y\,a^{5n}$	☐ $f\,'(a) = 5\,n\,y^2\,a^{5n-1}$	☐ $f\,'(a) = 0$

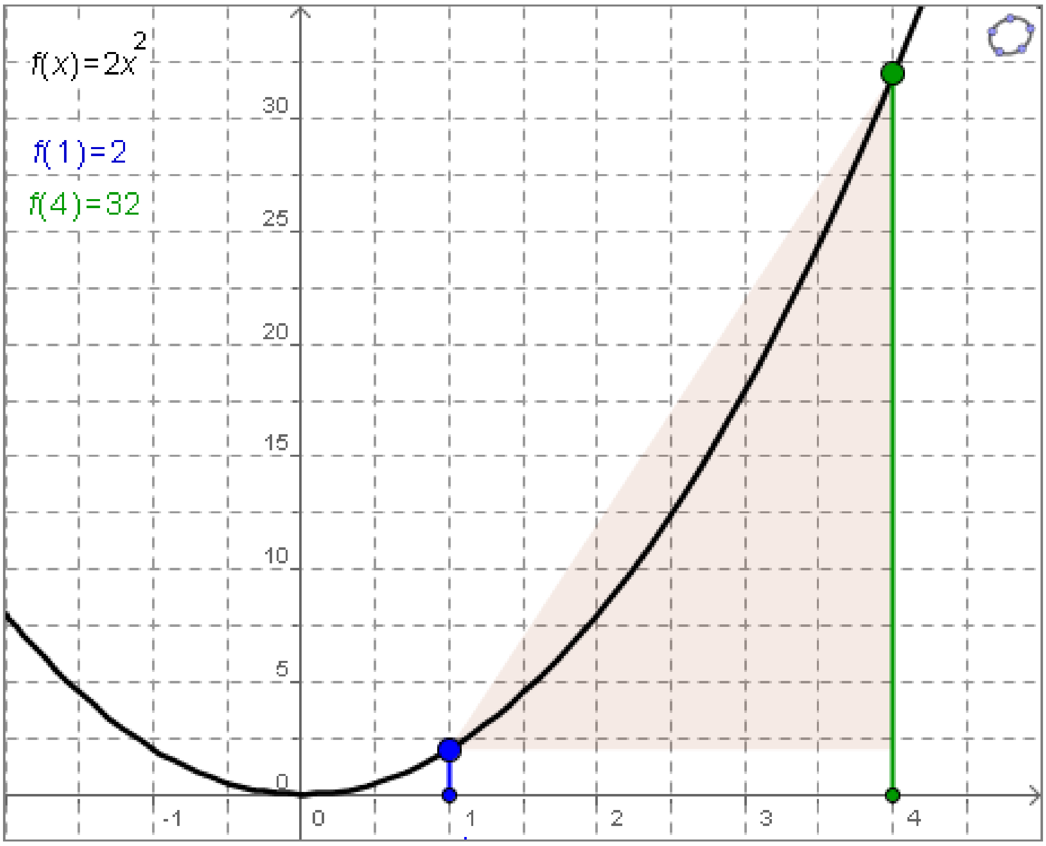
6	$f(x) = a^3\,x^3$		
☐ $f\,'(x) = 3\,a^2\,x^3$	☐ $f\,'(x) = 3\,a^3\,x^2$	☐ $f\,'(x) = 9\,a^2\,x^2$	☐ $f\,'(x) = 27\,a^2\,x^2$

7	$f(a) = a^3\,x^3$		
☐ $f\,'(x) = 3\,a^2\,x^3$	☐ $f\,'(x) = 3\,a^3\,x^2$	☐ $f\,'(x) = 9\,a^2\,x^2$	☐ $f\,'(x) = 27\,a^2\,x^2$

8	$f(x) = x\,y^{4n}$		
☐ $f\,'(y) = y^{4n}$	☐ $f\,'(y) = 4\,n\,y^{4n}$	☐ $f\,'(y) = 4\,n\,x\,y^{4n-1}$	☐ $f\,'(y) = 4\,n\,x\,y^{3n}$

10.) Steigung einer Funktion in der Umgebung eines Punktes

12	



Gegeben sei das obige Ausgangsbild.

a) Vervollständigen Sie den folgenden Lückentext:

Ist *f(x)* eine __________ und sind x_0 und x_1 Zahlen, so dass *f(x)* im gesamten __________ $[x_0, x_1]$ definiert ist, so heißt die Größe $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ __________ . Geometrisch stellt er den __________ der __________ durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$ des Graphen von *f(x)* [= Sekante] dar und kann als __________ von *f(x)* im Intervall $[x_0, x_1]$ interpretiert werden.

Mit den Abkürzungen $\Delta x = x_1 - x_0$ und $\Delta f = f(x_1) - f(x_0)$ schreibt er sich einfach als , __________

was seinen Charakter als __________ unterstreicht.

Zur Berechnung der Ableitung von *f(x)* an der Stelle *x* wird der

auch in der Form $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ angeschrieben.

Der $h \to 0$ dieser Größe ist - wenn er existiert - die Ablei-

tung *f '(x)* und nennt sich

Der gesamte Themenkomplex dieses Zweigs der Mathematik gehört zur sogenannten

Begriffe zum Einsetzen: ***Geraden*** $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ ***mittlere/durchschnittliche Änderungsrate*** ***Anstieg***

Differenzenquotient ***Grenzwert*** $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ***Intervall***

Differentialquotient ***Differentialrechnung*** ***reelle Funktion*** ***Quotient von Differenzen***

ZUSATZAUFGABE: Verwenden Sie den Graphen von Aufgabe 10

6	

a) Welchen Wert hat die Ableitung der Funktion f(x) an der Stelle x = 1?

b) Bestimmen Sie die Steigung der Sekante durch die beiden gegebenen Punkte der Funktion.