11. Jgst.	**3. Klassenarbeit**	**Datum: 08.03.2024**
Klasse: GY 23 a	**Fach: Mathematik (Kernfach)**	

Thema: Differentialquotient; Ableitungen
Tangentenberechnung; Pascalsches △

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

1.) Binomischer Lehrsatz und Pascalsches Dreieck

10	

Im Pascalschen Dreieck gilt folgende Gesetzmäßigkeit:

Die Zahlenwerte der n-ten Zeile ergeben als Summe 2^n.

(i) Zeigen Sie dies anhand der Zahlenwerte der 4. Zeile.

(ii) Erklären Sie aufgrund dieser Gesetzmäßigkeit, dass sich die Summe in der jeweils darauffolgenden Zeile verdoppelt und beweisen Sie diese Tatsache.

Lösung:

Zahlenwerte in Zeile 4: $1+4+6+4+1 \quad = \quad 2^4$

Zahlenwerte in Zeile (n+1):

$$2^{n+1} \quad \Rightarrow \quad 2^n \cdot 2^1 = 2 \cdot 2^n \Rightarrow \text{Verdoppelung der Zeilensumme aus Zeile n}$$

2.) Ableitungen I

18	

Bilden Sie die erste Ableitung der jeweiligen Funktionen:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{5}x^3 \qquad f'(x) = 2x^3 - \frac{3}{5}x^2$

b) $f(x) = -6x^2 + 3x - 9 \qquad f'(x) = -12x + 3$

c) $f(x) = (2x+4)(3x^2-6x)$

$f(x) = 6x^3 - 24x \quad \rightarrow \quad f'(x) = 18x^2 - 24$

d) $f(x) = x^3(8x^2-4x)$

$f(x) = 8x^5 - 4x^4 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 40x^4 - 16x^3$

e) $f(x) = 3x^{2n} - 6x^n + 3x$

$f'(x) = 6n \cdot x^{2n-1} - 6n \cdot x^{n-1} + 3$

3.) Ableitungen II

8	

Nun werden die Funktionen etwas kniffliger – bestimmen Sie auch hier die 1. Ableitung:

a) $f(x) = \frac{3}{x^4}$

Lösung: $f(x) = \frac{3}{x^4} = 3x^{-4} \rightarrow f'(x) = -12x^{-5} = -\frac{12}{x^5}$

b) $f(x) = \sqrt[4]{x^5}$

Lösung: $f(x) = \sqrt[4]{x^5} = x^{\frac{5}{4}} \rightarrow f'(x) = \frac{5}{4} \cdot x^{\frac{1}{4}} = \frac{5}{4} \cdot \sqrt[4]{x}$

4.) Ableitung mit der h-Methode

8	

Bilden Sie die Ableitungen der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^4$ mittels der h-Methode:

Ansatz: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Lösung:

$$m_{Tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2}(x+h)^4 - \frac{1}{2}x^4}{h}$$

$$m_{Tan} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2}\left(x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4\right) - \frac{1}{2}x^4}{h}$$

$$m_{Tan} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2}x^4 + 2x^3h + 3x^2h^2 + 2xh^3 + \frac{1}{2}h^4 - \frac{1}{2}x^4}{h}$$

$$m_{Tan} = \lim_{h \to 0} \frac{h\left(2x^3 + 3x^2h + 2xh^2 + \frac{1}{2}h^3\right)}{h}$$

$$m_{Tan} = \lim_{h \to 0} \left(2x^3 + 3x^2h + 2xh^2 + \frac{1}{2}h^3\right) = 2x^3 = f'(x)$$

5.) Erklärungen zu Ableitung(en)

4	

Begründen Sie aus analytischer **und** grafischer Sichtweise, warum die Ableitung einer Konstanten wie z.B. $f(x) = 2$ immer den Wert 0 ergibt.

Lösung:

Grafische/geometrische Erklärung:

Die Funktion ist eine Konstante und verläuft parallel zur x-Achse und hat daher die Steigung m = 0.

Analytische Erklärung:

$$f(x) = 2 = 2x^0 \rightarrow f'(x) = 0 \cdot 2x^{-1} = 0 = m$$

6.) Steigungen ermitteln

24	

(i) Gegeben sei folgende Funktion: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2$

a) Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen von f(x).

b) In welchen Punkten hat der Graph der Funktion eine waagrechte Tangente?

Lösung:

$$f'(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad und \quad f''(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f'(x) = x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \rightarrow \left(x^2 - 6x + 9\right)x = 0$$

$$\rightarrow x = 0 \quad und \quad x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow |x| = 5$$

(ii) Sei nun die Funktion gegeben mit $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x$

a) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion.

b) Welche Steigung besitzt die Funktion an der Stelle **x = 2**?

c) An welchen Stellen x beträgt die Steigung der Funktion **m = -11**?

Lösung:

$$f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x = 0 \rightarrow \left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}\right)x = 0$$

$$\rightarrow x = 0 \quad und \quad -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2} = 0 \rightarrow |x| = 3$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2} \xrightarrow{x=2} f'(2) = -\frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} = m$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2} = 11 \rightarrow |x| = 5$$

7.) **Eigenschaften von Funktionen**

24	

Gegeben sei der Graph der Funktion $f(x)$

Beantworten Sie folgende Fragen zum Graphen – bitte jeweils auch kurze Begründung.

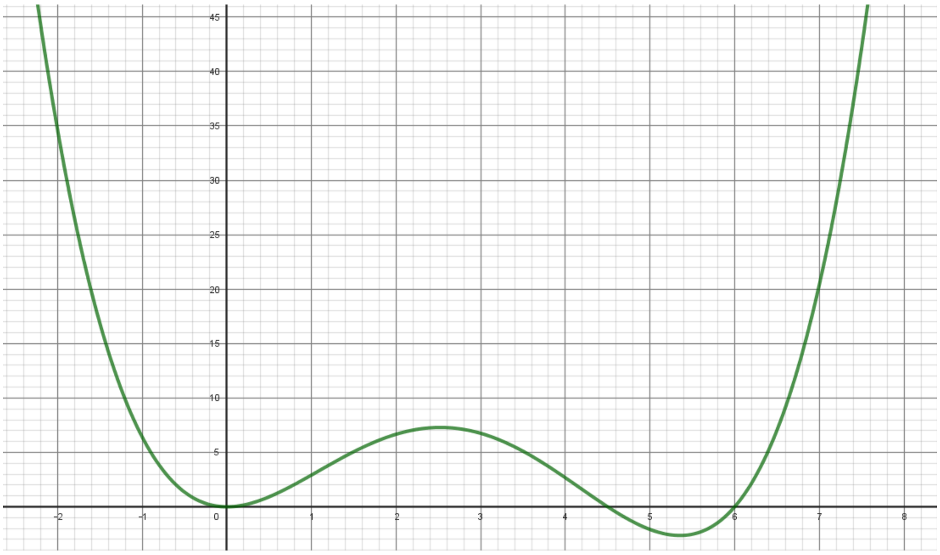
a) An welchen Stellen befinden sich die Hoch- und Tiefpunkte?

b) In welchen Phasen/Intervallen fällt die Funktion?

c) Geben Sie zwei Punkte an, an denen die Funktion monoton steigend verläuft.

d) Welchen Grad besitzt die Funktion.

e) Wie viele Nullstellen besitzt die Funktion?
Bilden Sie hieraus die Funktionsvorschrift als Linearfaktorzerlegung.



Beantworten Sie folgende Fragen zum Graphen – bitte jeweils auch kurze Begründung.

a) An welchen Stellen befinden sich die Hoch- und Tiefpunkte?

Lösung:

Die Hoch- und Tiefpunkte befinden sich an den Stellen mit der Steigung m = 0 mit gleichzeitiger Änderung des Vorzeichens des Steigungsverhaltens:

Tiefpunktstellen: x = 0 und x = 5,3 Hochpunktstelle: x = 2,5

b) In welchen Phasen/Intervallen fällt die Funktion?

Lösung:

Die Funktion fällt im Intervall $I_1 = \left]-\infty\,;0\right[$ und im Intervall $I_2 = \left]2,5\,;5,3\right[$.

Hier besitzt die Funktion eine negative Steigung; zudem müssen an den Untergrenzen die Tiefpunktstellen liegen.

c) Geben Sie zwei Punkte an, an denen die Funktion monoton steigend verläuft.

Lösung:

Die Funktion steigt im Intervall $I_1 = \left]0\,;2,5\right[$ und im Intervall $I_2 = \left]5,3\,;\infty\right[$.

Hier besitzt die Funktion eine positive Steigung; in diesen Intervallen müssen die x-Werte der gesuchten Punkte liegen.

d) Welchen Grad besitzt die Funktion.

Lösung:

Der Grad der Funktion muss gerade sein und aufgrund der 3 Extrema den Grad n = 4 haben, da die Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereichs gegen Unendlich streben.

e) Wie viele Nullstellen besitzt die Funktion?
Bilden Sie hieraus die Funktionsvorschrift als Linearfaktorzerlegung.

Lösung:

Die Funktion besitzt eine doppelte Nullstelle bei x = 0 und zwei einfache Nullstellen bei x = 4,5 und bei x = 6.

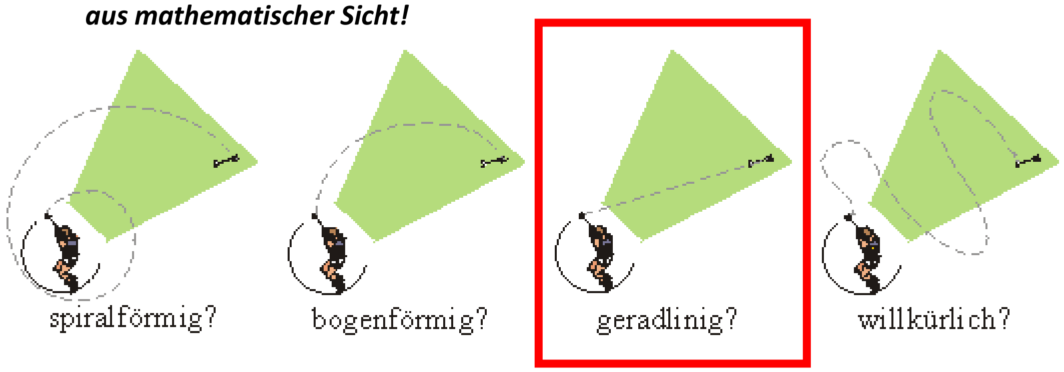
$$f(x) = a \cdot x^2 \cdot (x - 4{,}5) \cdot (x - 6)$$

⇨ ***Anmerkung: Auswahl – entweder 8 und 9 ODER (nur) 10***

8.) **Sachaufgabe zu Ableitung(en):** Flugbahn beim Hammerwurf
Welche Flugbahn wird ein Hammer zurücklegen?

4	

Kreuzen Sie die richtige Lösung an und begründen Sie Ihre Meinung aus mathematischer Sicht!



Lösung:

Die Abflugrichtung ist die Tangente an der Stelle, an der das Wurfgerät nach der Beschleunigung losgelassen wird.
=> Der Hammer wird geradlinig bzw. tangential zur Kreisbewegung wegfliegen.

9.) **Differenzierbarkeit und Ableitungsregeln**
Bestimmen Sie durch Ankreuzen jeweils die Ableitungsfunktion *f* ' von den Funktionen *f*.

8	

1	$f(x) = \pi^2$		
☐ $f'(x) = 2\pi$	☐ $f'(x) = \pi$	☐ $f'(x) = \pi x$	☐ $f'(x) = 0$

2	$f(x) = x^{n+1}$		
☐ $f'(x) = n\,x^n$	☐ $f'(x) = (n+1)\,x^n$	☐ $f'(x) = (n-1)\,x^n$	☐ $f'(x) = (n+1)\,x^{n-1}$

3	$f(y) = x\,y^{4n}$		
☐ $f'(y) = y^{4n}$	☐ $f'(y) = 4\,n\,y^{4n}$	☐ $f'(y) = 4\,n\,x\,y^{4n-1}$	☐ $f'(y) = 4\,n\,x\,y^{3n}$

4	$f(a) = 0{,}4\, a^{10}\, x^4$						
☐	$f\,'(a) = 1{,}6\, a^{10}\, x^3$	☐	$f\,'(a) = 4\, a^9\, x^4$	☐	$f\,'(a) = 4\, a^9\, x^3$	☐	$f\,'(a) = 0{,}4\, a^9\, x^4$

5	$f(a) = y^2\, a^{5n}$						
☐	$f\,'(a) = a^{5n}$	☐	$f\,'(a) = 2\, y\, a^{5n}$	☐	$f\,'(a) = 5\, n\, y^2\, a^{5n-1}$	☐	$f\,'(a) = 0$

6	$f(x) = a^3\, x^3$						
☐	$f\,'(x) = 3\, a^2\, x^3$	☐	$f\,'(x) = 3\, a^3\, x^2$	☐	$f\,'(x) = 9\, a^2\, x^2$	☐	$f\,'(x) = 27\, a^2\, x^2$

7	$f(a) = a^3\, x^3$						
☐	$f\,'(x) = 3\, a^2\, x^3$	☐	$f\,'(x) = 3\, a^3\, x^2$	☐	$f\,'(x) = 9\, a^2\, x^2$	☐	$f\,'(x) = 27\, a^2\, x^2$

8	$f(x) = x\, y^{4n}$						
☐	$f\,'(y) = y^{4n}$	☐	$f\,'(y) = 4\, n\, y^{4n}$	☐	$f\,'(y) = 4\, n\, x\, y^{4n-1}$	☐	$f\,'(y) = 4\, n\, x\, y^{3n}$

ZUSATZAUFGABE: Verwenden Sie den Graphen von Aufgabe 10

6	

a) Welchen Wert hat die Ableitung der Funktion f(x) an der Stelle x = 1?

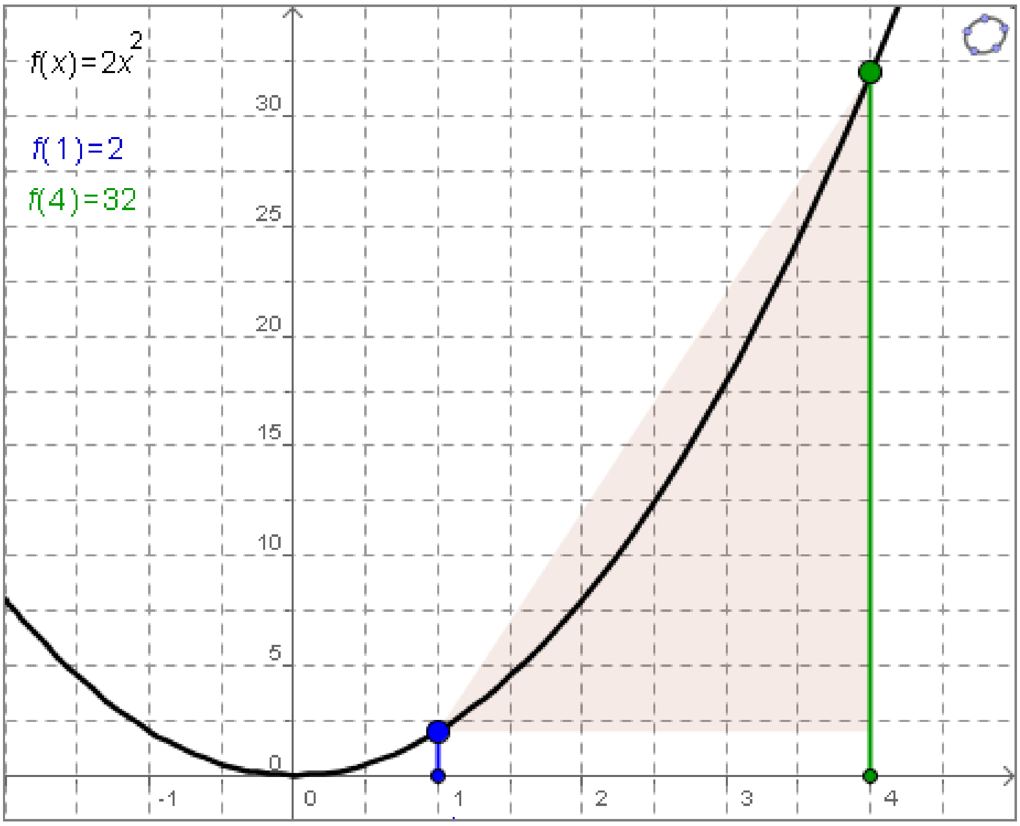
Lösung: $$f\,'(x) = 4x \xrightarrow{x=1} f\,'(1) = 4 = m$$

b) Bestimmen Sie die Steigung der Sekante durch die beiden gegebenen Punkte der Funktion.

Lösung: $$m_{Sek} = \frac{32-2}{4-1} = \frac{30}{3} = 10$$

10.) Steigung einer Funktion in der Umgebung eines Punktes

12	



Gegeben sei das obige Ausgangsbild.

a) Vervollständigen Sie den folgenden Lückentext:

Ist *f(x)* eine ______ und sind x_0 und x_1 Zahlen, so dass *f(x)* im gesamten

______ $[x_0, x_1]$ definiert ist, so heißt die Größe $\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$

______ . Geometrisch stellt er den ______

der ______ durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$ des Graphen von

f(x) [= Sekante] dar und kann als ______ von *f(x)* im Intervall $[x_0, x_1]$ interpretiert werden.

Mit den Abkürzungen $\Delta x = x_1 - x_0$ und $\Delta f = f(x_1) - f(x_0)$ schreibt er sich einfach als , ______

was seinen Charakter als ______ unterstreicht.

Zur Berechnung der Ableitung von *f(x)* an der Stelle *x* wird der ______ auch in der Form $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ angeschrieben.

Der [ ] $h \to 0$ dieser Größe ist - wenn er existiert - die Ablei-

tung *f '(x)* und nennt sich [ ]

Der gesamte Themenkomplex dieses Zweigs der Mathematik gehört zur sogenannten

[ ]

Begriffe zum Einsetzen: ***Geraden***	$\frac{\Delta f}{\Delta x}$	***mittlere/durchschnittliche Änderungsrate***	***Anstieg***
Differenzenquotient	***Grenzwert***	$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$	***Intervall***
Differentialquotient	***Differentialrechnung***	***reelle Funktion***	***Quotient von Differenzen***

Lösung:

Ist *f(x)* eine ***reelle Funktion***, und sind x_0 und x_1 Zahlen, so dass *f(x)* im gesamten ***Intervall*** $[x_0, x_1]$ definiert ist, so heißt die Größe $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ ***Differenzenquotient***. Geometrisch stellt er den ***Anstieg*** der ***Geraden*** durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$ des Graphen von *f(x)* [= Sekante] dar und kann als ***mittlere/durchschnittliche Änderungsrate*** von *f(x)* im Intervall $[x_0, x_1]$ interpretiert werden.

Mit den Abkürzungen $\Delta x = x_1 - x_0$ und $\Delta f = f(x_1) - f(x_0)$ schreibt er sich einfach als $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, was seinen Charakter als ***Quotient von Differenzen*** unterstreicht. Die Grenzlage der Sekante wird dann zur Tangente. Zur Berechnung der Ableitung von *f(x)* an der Stelle *x* wird der ***Differenzenquotient*** auch in der Form $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ angeschrieben, wobei h positiv oder negativ sein kann. Der ***Grenzwert*** $h \to 0$ dieser Größe ist - wenn er existiert - die Ableitung *f '(x)* und nennt sich ***Differentialquotient***, definiert durch $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Dieses Berechnungsverfahren nennt man h-Methode. Der gesamte Themenkomplex dieses Zweigs der Mathematik gehört zur sogenannten ***Differentialrechnung***.