11. Jgst.	4. Test	Datum: 13.12.2023
Klasse: GY 23a	Fach: Mathematik (Kernfach)	

Thema: Ganzrationale Funktionen (Linearfaktoren, Nullstellen, Horner-Schema)

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

1.) Horner-Schema (Praxis)

10	

Bestimmen Sie die Funktionswerte mit dem Horner-Schema:

$$f(x) = -x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 5x - 4 \qquad \text{für } x = -2$$

	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
	-1	2	3	-5	-4
x = -2		2	-8	10	-10
Ergebnis	-1	4	-5	5	-14

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 \qquad \text{für } x = 6$$

	a_3	a_2	a_1	a_0
	1/3	-4	0	0
x = 6		2	-12	-72
Ergebnis	1/3	-2	-12	-72

2.) Nullstellen berechnen

24	

Bestimmen Sie die Lösungen folgender Gleichungen:

a) $3x(2x-6)(x^2+4) = 0$

$$3x(2x-6)(x^2+4) = 0 \rightarrow x = 0 \quad und \quad x = 3$$

b) $6x^4 + 2x^3 = 0$

$$(6x+2)x^3 = 0 \rightarrow x = 0[dreifach] \quad und \quad x = -\frac{1}{3}$$

c) $x^{n+1} - x^n = 0$

$$x^n \cdot x - x^n = (x-1)x^n = 0 \rightarrow x = 1 \quad und \quad x = 0[n-fach]$$

d) $2x^2+8x-4 \;=\; 6$

$$2x^2+8x-4 \;=\; 6 \xrightarrow{-6} 2x^2+8x-10 \;=\; 0$$

$$\xrightarrow{abc-Formel} x_{1/2} = \frac{-8\pm\sqrt{64+80}}{4} = \frac{-8\pm\sqrt{144}}{4} = \frac{-8\pm 12}{4}$$

$$\to \quad x_1 = \frac{-8+12}{4} = 1 \quad und \quad x_2 = \frac{-8-12}{4} = -5$$

e) $-2x^2+20 \;=\; 4x^4$

$$-2x^2+20 \;=\; 4x^4 \xrightarrow{-4x^4} -4x^4-2x^2+20 \;=\; 0$$

$$\xrightarrow[u=x^2]{Substitution} -4u^2-2u+20 \;=\; 0$$

$$\xrightarrow{abc-Formel} u_{1/2} = \frac{2\pm\sqrt{4+320}}{-8} = \frac{2\pm\sqrt{324}}{-8} = \frac{2\pm 18}{-8}$$

$$\to \quad u_1 = \frac{2+18}{-8} = -\frac{20}{8} = -\frac{5}{2} \quad und \quad u_2 = \frac{2-18}{-8} = \frac{-16}{-8} = 2$$

$$\xrightarrow[u=x^2]{\text{Re}-Substitution} x^2 = -\frac{5}{2} \to keine\ Lösung \quad und \quad x^2 = 2 \xrightarrow{\sqrt{\ }} x_{1/2} = \pm\sqrt{2}$$

f) $-x^2-4x+2{,}5 \;=\; x^2$

$$-x^2-4x+2{,}5 \;=\; x^2 \xrightarrow{-x^2} -2x^2-4x+2{,}5 \;=\; 0$$

$$\xrightarrow{abc-Formel} x_{1/2} = \frac{4\pm\sqrt{16+20}}{-4} = \frac{4\pm\sqrt{36}}{-4} = \frac{4\pm 6}{-4}$$

$$\to \quad x_1 = \frac{4+6}{-4} = \frac{10}{-4} = -\frac{5}{2} \quad und \quad x_2 = \frac{4-6}{-4} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

3.) Ganzrationale Funktionen I

4	

Eine ganzrationale Funktion sei durch folgende Koeffizienten gegeben:

$a_5 = 4$ $\quad a_3 = 2$ $\quad a_4 = a_2 = a_1 = a_0 = 0$

Wie viele Nullstellen hat diese Funktion mindestens, wie viele höchstens?
Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

=> ***Es handelt sich um eine Funktion 5. Grades; daher hat die Funktion mindestens eine und höchstens fünf Nullstellen.***

4.) **Ganzrationale Funktionen II** | 4 | |

Geben Sie die Vorschrift einer ganzrationalen Funktion 4. Grades an, welche die angegebenen Nullstellen und keine weiteren besitzt:

$x_1 = x_2 = 3$ $x_3 = 1$ $x_4 = -2$

$$\Rightarrow \quad f(x) = (x-3)^2 \cdot (x-1) \cdot (x+2)$$

5.) **Rekonstruktion ganzrationaler Funktionen (Grundstruktur)** | 18 | |

Die ganzrationalen Funktionen aufgrund der gegebenen Eigenschaften haben folgende allgemeine Linearfaktorform:

$$f(x) = c \cdot (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$$

Funktion 1: **Grad 3; Nullstelle x = 1, Nullstelle x = -3 (doppelt) und P(2/2)**

Funktion 2: **Grad 4; Nullstelle x = -2 (zweifach); Nullstelle x = 3 (doppelt) und P(2/1)**

a) Ermitteln Sie die Funktionsvorschrift der ganzrationalen Funktionen aufgrund der gegebenen Eigenschaften in der Linearfaktordarstellung.

Funktion 1:

$$f(x) = c \cdot (x-1) \cdot (x+3)^2 \xrightarrow[c \; = \; \frac{2}{25}]{mit} f(x) = \frac{2}{25} \cdot (x-1) \cdot (x+3)^2$$

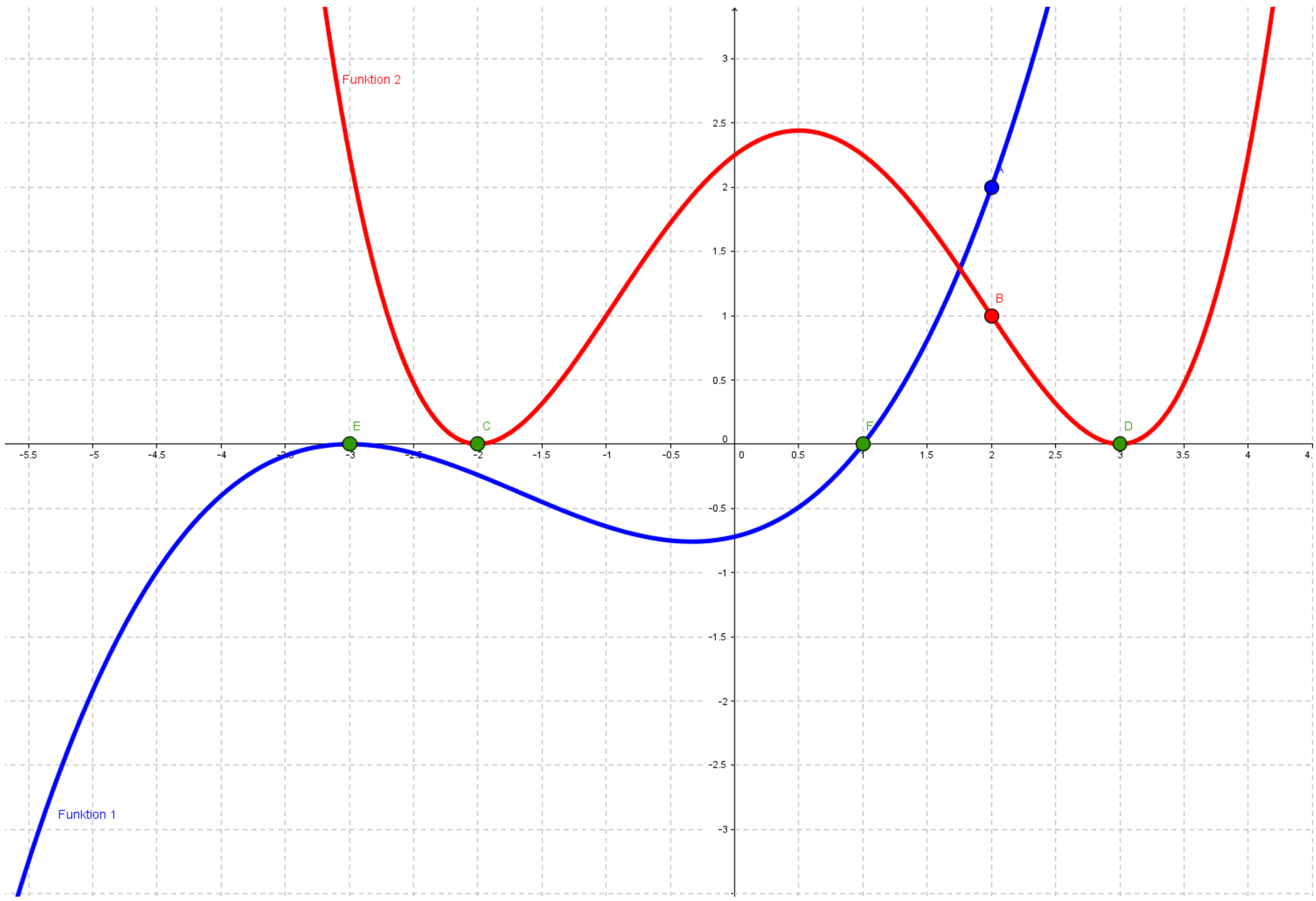
$$\xrightarrow[einsetzen]{Punkt\ P(2 \mid 2)} f(2) = c \cdot (2-1) \cdot (2+3)^2 = 2 \rightarrow c \cdot 1 \cdot 25 = 2 \rightarrow c = \frac{2}{25}$$

Funktion 2:

$$f(x) = c \cdot (x+2)^2 \cdot (x-3)^2 \xrightarrow[c \; = \; \frac{1}{16}]{mit} f(x) = \frac{1}{16} \cdot (x+2)^2 \cdot (x-3)^2$$

$$\xrightarrow[einsetzen]{Punkt\ P(2 \mid 1)} f(2) = c \cdot (2+2)^2 \cdot (2-3)^2 = 1 \rightarrow c \cdot 16 \cdot 1 = 1 \rightarrow c = \frac{1}{16}$$

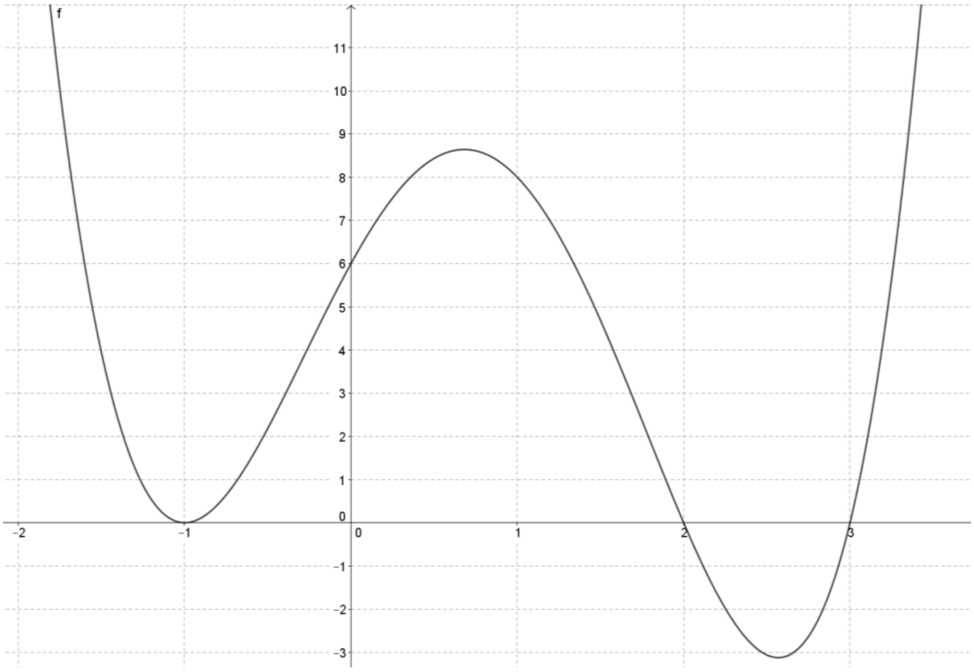
b) Zeichnen Sie die beiden ganzrationalen Funktionen aufgrund der gegebenen Eigenschaften in das Koordinatensystem:



6.) **Funktion aus gegebenem Graphen bestimmen**

10	

Wie lautet die Funktionsgleichung des Graphen in Linearfaktor- **und** Polynom-/Koeffizientendarstellung?



$$Linearfaktordarstellung: \quad f(x) = (x+1)^2 \cdot (x-2) \cdot (x-3)$$

$$f(x) = (x^2+2x+1) \cdot (x^2-5x+6) = x^4-5x^3+6x^2+2x^3-10x^2+12x+x^2-5x+6$$

$$Koeffizienten-/Polynomdarstellung: \quad f(x) = x^4-3x^3-3x^2+7x+6$$