11. Jgst.	8. Test	Datum: 22.03.2024
Klasse: GY 23a	Fach: Mathematik (Kernfach)	

Thema: Extrema, notwendiges & hinreichendes Kriterium; Steigung; Ableitungen

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Name:	
Punkte:	Note:

1.) Steigung einer Funktion

5	

Berechnen Sie die Steigung der Funktion f(x) im Punkt P:

$$f(x) = 3x^2 - 4x \qquad P(1 \mid -1)$$

$$f(x) = 3x^2 - 4x \qquad P(1 \mid -1)$$

$$f'(x) = 6x - 4 \xrightarrow{x=1} f'(1) = 6 \cdot 1 - 4 = 2 = m$$

2.) Extrema nachweisen

12	

Folgende Funktion sei gegeben: $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3$

a) Bestimmen Sie Stellen mit der Steigung m = 0.

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3$$

$$f'(x) = 2x^3 - 6x^2 = 0 \rightarrow (2x-6)x^2 = 0 \rightarrow x = 0[doppelt] \vee x = 3$$

b) Untersuchen Sie die Stellen mit m = 0 auf Hoch- oder Tiefpunkt-eigenschaft, indem Sie das Steigungsverhalten in der Umgebung der Stellen analysieren.

$Stelle: \quad x = 0$

$f'(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 = -2 - 6 = -8 < 0 \quad monoton\ fallend$

$f'(1) = 2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 = 2 - 6 = -4 < 0 \quad monoton\ fallend$

An der Stelle x = 0 befindet sich ein Sattel-/Terrassenpunkt,
da keine VZ-Änderung des Steigungsverhaltens vorliegt.

$Stelle: \quad x = 3$

$f'(1) = 2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 = 2 - 6 = -4 < 0 \quad monoton\ fallend$

$f'(4) = 2 \cdot 4^3 - 6 \cdot 4^2 = 32 > 0 \quad monoton\ steigend$

An der Stelle x = 3 befindet sich ein Tiefpunkt/Minimum,
da eine VZ-Änderung des Steigungsverhaltens von fallend auf steigend vorliegt.

10	

3.) Fragen zur Differentialrechnung

a) Warum muss zur Ermittlung eines Extremwertes einer Funktion immer gelten: $f'(x) = 0$?

Die notwendige Bedingung für einen Hoch- oder Tiefpunkt muss m = 0
(Steigung vom Wert 0 lauten); da f'(x) 0 m gilt, folgt die Bedingung: f'(x) = 0

b) Nehmen Sie kurz Stellung zu folgender Behauptung:
Ein Hochpunkt liegt immer über der x-Achse
und ein Tiefpunkt liegt immer unterhalb der Abszisse.

Die Aussage ist falsch, denn der Funktionswert eines Hochpunktes kann auch unterhalb der x-Achse liegen; ebenso gilt dies analog für einen Tiefpunkt über der x-Achse.
Hierfür dienen folgende Beispiele:

$$f(x) = x^2 + 2$$

$$\rightarrow f'(x) = 2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow f''(x) = 2 > 0 \rightarrow TP(0 \mid 2)$$

Tiefpunkt liegt über / oberhalb der x-Achse.

$$g(x) = -x^2 - 2$$

$$\rightarrow f'(x) = -2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow f''(x) = -2 < 0 \rightarrow HP(0 \mid -2)$$

Hochpunkt liegt unter / unterhalb der x-Achse.

c) Wie viele Extremwerte kann eine Funktion vom Grad 4 höchstens haben? Bitte begründen Sie kurz Ihre Meinung.

Ein Funktion 4. Grades kann maximal 3 Extrema besitzen, da der Grad der zugehörigen Ableitungsfunktion n-1 => 3 beträgt und daher die Gleichung f'(x) = 0 höchstens drei Lösungen besitzen kann.

4.) Untersuchung einer ganzrationalen Funktion

Führen Sie bei der gegebenen Funktion $f(x) = x^3 - x^2 - x$ eine Untersuchung bezüglich folgender Kriterien durch:

18	

a) Bestimmen Sie die ersten **drei** Ableitungen der Funktion.

$$f(x) = x^3 - x^2 - x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 \qquad f''(x) = 6x - 2 \qquad f'''(x) = 6$$

b) Ermitteln Sie die Nullstellen.

$$f(x) = x^3 - x^2 - x = \left(x^2 - x - 1\right)x = 0$$

$$\rightarrow x = 0 \vee x_{2/3} = \frac{1 \pm \sqrt{1+5}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{6}}{2} = 0{,}5 \pm \sqrt{1{,}5}$$

c) Berechnen Sie die Extremwerte und prüfen Sie mittels 2. Ableitung, ob es sich um einen Hoch- oder Tiefpunkt handelt.

$$f(x) = x^3 - x^2 - x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 0 \rightarrow x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm 4}{6} \rightarrow x_1 = 1 \vee x_2 = -\frac{1}{3}$$

$$f''(1) = 6 \cdot 1 - 2 = 4 > 0 \rightarrow TP(1 \mid f(1)) = TP(1 \mid -1)$$

$$f''\left(-\frac{1}{3}\right) = 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - 2 = -4 < 0 \rightarrow HP\left(-\frac{1}{3} \,\middle|\, f\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = HP\left(-\frac{1}{3} \,\middle|\, \frac{5}{27}\right)$$

5.) Kurvenanalyse **25**

Der Graph einer Funktion sei gegeben.

Beantworten bzw. bearbeiten Sie folgende Arbeitsaufträge:

a) Markieren Sie die Extrema und ermitteln Sie die Koordinaten durch Ablesen.

Vergleiche Graph

b) Bestimmen Sie die Monotonieintervalle und das entsprechende Steigungsverhalten der Funktion in diesen Intervallen.

$I_1 =]-\infty ; -0,2[$ *monoton fallend* $I_2 =]-0,2 ; 2[$ *monoton steigend*

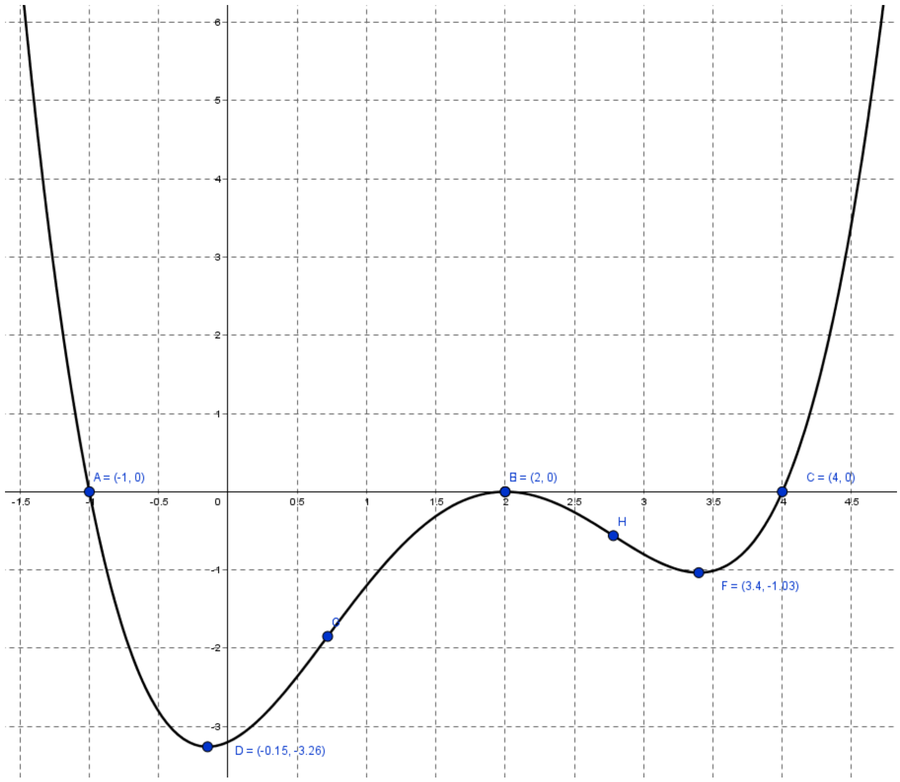
$I_3 =]2 ; 3,4[$ *monoton fallend* $I_4 =]3,4 ; -\infty[$ *monoton steigend*

c) Nennen Sie drei Gründe, weshalb der Grad der Funktion hier n = 4 sein muss.

Grund 1: 4 Nullstellen x = -1 x = 2 (doppelt) x = 4

Grund 2: Beide „Funktionsäste“ an den Rändern des Definitionsbereichs gehen gegen Unendlich => Gerader Grad

Grund 3: Es liegen drei Extrema vor.



d) Zeichnen Sie eine Funktion mit einer Nullstelle und 2 Extremwerten in das Koordinatensystem und beschriften Sie die markanten Punkte.