Grundlagen zu Verteilungsfunktionen mit diskreten und stetigen Zufallsvariablen

Diskret:

Hypergeometrische Verteilung – Ziehen ohne Zurücklegen:

$$H(X=k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad mit \quad 0 \le k \le n \quad und \quad M \le N \quad und \quad n \le N \quad und \quad k \le M$$

Binomialverteilung – Bernoulliexperiment/Bernoullikette (Ziehen mit Zurücklegen):

$$B(X=k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad mit \quad k \le n$$

Erwartungswert: $\mu = n \cdot p$

Varianz: $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p) = \mu \cdot (1-p)$

Poissonverteilung – Anwendung bei $\text{n groß} \quad \text{und} \quad \text{p} \le 0{,}05$:

$$P(X=k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \quad mit \quad \mu = n \cdot p$$

Stetig:

Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung - (Standard)Normalverteilung:
Wahrscheinlichkeitsdichte / Gauß-Glockenfunktion:

$$\varphi_{\mu;\sigma}(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2} \xrightarrow[und \quad \sigma=1]{mit \quad \mu=0} \varphi_{0;1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

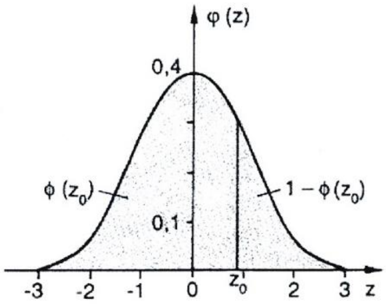
Umwandlung in die standardisierte ZV:

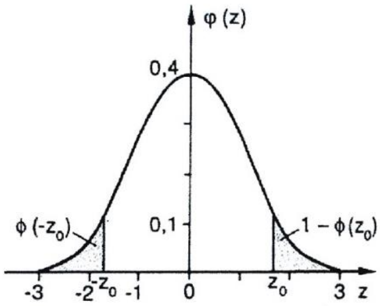
$$P(X \le k) = \Phi_{\mu;\sigma}\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) \quad und \quad z = \frac{k-\mu}{\sigma}$$

=> $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \quad und \quad \Phi(z) - \Phi(-z) = 2\Phi(z) - 1$

Tabelle zur Normalverteilung:

$$Lesen\ der Tabelle: \quad \Phi(z) \;=\; 0,... \quad und \quad \Phi(-z) \;=\; 1-\Phi(z)$$





z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7703	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998

Beispiele:

$$(1) \quad \Phi(2,37) \underset{ablesen}{\overset{direkt}{=}} 0,9911$$

$$(2) \quad \Phi(-2,37) \overset{Umwandlung}{=} 1-\Phi(2,37) \underset{ablesen}{\overset{direkt}{=}} 1-0,9911 = 0,0089$$

$$(3) \quad \Phi(z) = 0,7910 \xrightarrow[ablesen]{"umgekehrt"} z = 0,81$$

$$(4) \quad \Phi(z) = 0,2090 \underset{1-x=0,2090}{\overset{x\ festlegen}{=}} 1-0,7910 \xrightarrow[ablesen\ bei\ 0,7910]{"umgekehrt"} z = -0,81$$

Übungen

Binomialverteilung – Bernoulliexperiment (Ziehen mit Zurücklegen)

1. Die Wahrscheinlichkeit für eine Mädchengeburt beträgt 0,486.
   1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine Familie mit drei Kindern nur Jungen?
   2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine Familie mit vier Kindern mehr Mädchen als Jungen?
   3. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine Familie mit fünf Kindern mindestens ein Mädchen und mindestens einen Jungen?

2. Select-Palcebogums (ein pharmazeutischer Wirkstoff zur Behandlung von mathematischer Unkenntnis) wirken anfänglich bei etwa 4 von 5 Patienten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das „Medikament" bei
   1. genau vier von fünf Patienten
   2. zwischen 10 bis 20 von insgesamt 25 Patienten
   3. mindestens 8 von 10 Patienten Wirkung zeigt?

3. Ein Großhändler garantiert, dass seine Taschenrechner zu höchstens vier Prozent einen Defekt aufweisen. Ein Einzelhändler bezieht regelmäßig Geräte von ihm. Zur Überprüfung der Qualität entnimmt er eine Stichprobe von zwölf Taschenrechnern. Ist mehr als ein Gerät defekt, schickt er die Lieferung zurück.
   1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sendet der Einzelhändler die Lieferung zurück, wenn die Angabe des Großhändlers richtig ist?
   2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sendet der Einzelhändler die Lieferung zurück, wenn sich der Anteil defekter Geräte verdoppelt hat?

4. Silke lernt mit einem Computerprogramm Vokabeln und hat dabei eine Erfolgsquote von 93 %.
   1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kennt sie von 35 Vokabeln vier nicht?
   2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die 35. Vokabel die vierte, die sie nicht kennt?

5. Ole kauft eine Packung mit 50 Speichersticks, die erfahrungsgemäß zu 90 % einwandfrei sind. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
   1. Höchstens 40 sind einwandfrei.
   2. Mehr als 45 sind einwandfrei.
   3. Mindestens 2, aber höchstens 8 sind nicht funktionsfähig.

6. Eine Firma nimmt an, dass 45% der Bevölkerung ihr Produkt kennen. Bei einer Umfrage wurden 500 Personen befragt.
   1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass weniger als 200 Personen angeben, das Produkt zu kennen?
   2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht die Anzahl der Befragten, die das Produkt kennen, um mehr als 20 vom Erwartungswert ab?

7. Die freiwillige Feuerwehr eines Ortes verfügt über 120 Feuerwehrleute, von denen jeder mit 60% Wahrscheinlichkeit sofort verfügbar ist.
   1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass im Ernstfall mindestens 70 Feuerwehrleute zur Verfügung stehen?
   2. Geben Sie einen 90%-Streubereich $[\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon]$ für die Anzahl der verfügbaren Feuerwehrleute an!

Normalverteilung

1. In Mannheim wurde die Körpergröße aller Studenten gemessen. Es stellte sich heraus, dass die Größe normalverteilt ist, mit dem Erwartungswert μ = 175 cm und der Standardabweichung σ = 7,5 cm.
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Student
   1. kleiner als 180 cm ist? 3. zwischen 170 und 182 cm groß ist?
   2. kleiner als 160 cm ist? 4. größer als 180 cm ist?

2. Wie groß darf/muss ein Student in Mannheim sein, damit er
   1. zu den 20% kleinsten 3. zu den 10% größten Studenten gehört?
   2. In welchem symmetrischen Bereich [μ-ε, μ+ε] liegen die Größen von 95% aller Studenten?

3. Die Äpfel in einer Lieferung wiegen durchschnittlich 180 g, mit einer Standardabweichung von 50 g. Man kann annehmen, dass das Gewicht eine normalverteilte Zufallsvariable ist. Wie viel Prozent der Äpfel wiegen
   1. weniger als 150 g 2. mehr als 175 g 3. zwischen 200 und 250 g?

4. 10% der Äpfel aus werden aussortiert, weil sie zu leicht sind.
   1. Wie schwer darf ein Apfel höchstens sein, wenn er aussortiert wird?
   2. In welchem symmetrischen Bereich [μ-ε, μ+ε] liegen die Gewichte von 50% aller Äpfel? (Quartile)

5. Eine Maschine erzeugt Holzplatten, die im Mittel 30 mm dick sind. Die Standardabweichung beträgt 0,6 mm.
   1. Bei wie viel Prozent aller Platten liegt die Dicke zwischen 29,5 und 30,5 mm?
   2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Platte dicker als 31 mm ist?

6. Die Lebensdauer eines Ersatzteils ist normalverteilt, mit μ = 180 Tage und σ = 40 Tage.
   1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Lebensdauer weniger als 3 Monate beträgt? (1 Monat = 30 Tage)
   2. Bei wie viel Prozent aller Teile weicht die Lebensdauer um weniger als 1 Monat vom Erwartungswert ab?

7. Eine Maschine füllt Mehl in Säckchen ab. Sie ist auf ein Füllgewicht von 1006 g eingestellt, die Standardabweichung beträgt 4 g.
   1. Wie viel Prozent aller Säckchen enthalten weniger als 1000 g?
   2. Wie viel Prozent aller Säckchen enthalten zwischen 1000 g und 1010 g?
   3. Bei wie vielen Säckchen weicht das Gewicht um mehr als 10 g vom EW ab?

8. Eine Maschine stellt Nägel her. Die Länge der Nägel ist normalverteilt mit dem Erwartungswert μ = 8,00 cm und der Standardabweichung σ = 0,15 cm.
   1. Bei wie viel Prozent der Nägel weicht die Länge höchstens um ε = 0,20 cm vom Erwartungswert μ ab?
   2. Wie sind die Toleranzgrenzen festgelegt, wenn man weiß, dass 90% der Produktion zum Verkauf freigegeben werden?

9. Eine Maschine schneidet Holzplatten mit einer durchschnittlichen Länge von 80 cm und einer Standardabweichung von 0,3 cm zu.
   1. Wie viel Prozent der Platten sind kürzer als 79,5 cm?
   2. 7,2% der Platten sind Ausschuss. Welche Abweichung vom Mittelwert wird dabei toleriert?

Annäherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

10. Ein Medikament hat eine Erfolgswahrscheinlichkeit von 80%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 200 Patienten, die das Medikament einnehmen, höchstens 150 gesund werden?

11. Ein Weinhändler will seine Produkte per Telefonmarketing verkaufen. Es wird angenommen, dass jeder 10. Angerufene etwas bestellt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 250 Anrufen mindestens 20 Bestellungen eingehen?

12. 7% aller Eier werden beim Transport beschädigt. Ein Geschäft bekommt eine Lieferung von 1500 Eiern.
    1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass 120 oder mehr Eier beschädigt sind?
    2. In welchem symmetrischen Bereich [μ-ε, μ+ε] liegt mit 95% Wahrscheinlichkeit die Anzahl der beschädigten Eier?

13. Eine Fluggesellschaft bietet Linienflüge mit einem Airbus (300 Sitzplätze) an. Erfahrungsgemäß erscheinen nur 80% der Passagiere, die einen Platz gebucht haben, auch tatsächlich zum Abflug.
    1. In welchem Bereich liegt mit 95%iger Wahrscheinlichkeit die Anzahl der tatsächlich belegten Plätze bei einem ausgebuchten Flug?
    2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem ausgebuchten Flug mindestens 250 Plätze belegt werden?
    3. Aus Sparsamkeitsgründen ist die Fluggesellschaft dazu übergegangen, die Flüge überbuchen zu lassen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer 20%igen Überbuchung (d.h. 360 Plätze verkauft) nicht alle erscheinenden Fluggäste transportiert werden können (d.h. dass mindestens 301 Passagiere kommen)?

14. Der Intelligenzquotient (IQ) ist eine normalverteilte Zufallsvariable mit $\mu = 100$ und $\sigma = 15$.
    a) Welchen IQ muss man haben, um zu den intelligentesten 2% der Bevölkerung zu gehören?
    b) Ein Ort hat 1800 Einwohner. Bei wie vielen kann man einen IQ über 120 erwarten?
    c) Wie viele Einwohner haben einen IQ zwischen 80 und 120?