Baumdiagramme und Pfadregeln

In diesem Bereich geht es darum, mit Hilfe bereits bekannter Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen die Wahrscheinlichkeiten weiterer, oft «komplizierterer» Ereignisse zu bestimmen. Ein wichtiges Hilfsmittel sind *Baumdiagramme*. Sie sind insbesondere bei mehrstufigen Zufallsexperimenten hilfreich. Eine Verzweigung entspricht dabei den möglichen Versuchsausgängen der jeweiligen Stufe; längs der «Äste» werden die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten notiert.

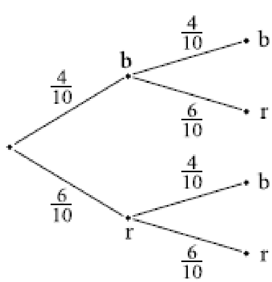
Bei der Erstellung des Baumdiagrammes muss man darauf achten, dass sich bei Stichproben ohne Zurücklegen die Wahrscheinlichkeiten bei jeder Stufe ändern.

Manchmal ist es auch geschickt oder hilfreich, mit dem Gegenereignis zu rechnen; dies ist vor allem (aber nicht immer) bei den Signalwörtern «mindestens» oder «höchstens» der Fall. Ist A ein Ereignis und A das zugehörige Gegenereignis, so gilt für die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

1. Beispiel: Ziehen mit Zurücklegen

Ein Gefäß enthält 4 blaue und 6 rote Kugeln. Es werden 2 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
Da 4 blaue und 6 rote, also insgesamt 10 Kugeln in der Urne sind, beträgt die Wahrscheinlichkeit bei jedem Ziehen für die Ergebnisse blau (b): $\frac{4}{10}$ und für rot (r): $\frac{6}{10}$.
Damit erhält man folgendes Baumdiagramm:



Wichtige Rechenregeln für Baumdiagramme sind die *1. Pfadregel* und die *2. Pfadregel*:
Die 1. Pfadregel (Produktregel) besagt, dass man die Wahrscheinlichkeit längs eines Pfades berechnet, indem man die Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Äste miteinander multipliziert.
Mit der 2. Pfadregel (Summenregel) kann man die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses berechnen, indem man die Wahrscheinlichkeiten aller zugehörigen Pfade addiert.

Will man beispielsweise die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass beide Kugeln rot sind, so ergibt sich mit Hilfe der 1. Pfadregel:

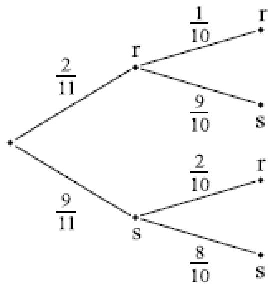
$$P(\text{«beide Kugeln rot»}) = P(rr) = \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{36}{100} = 0,36$$

Will man die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass beide Kugeln gleichfarbig sind, so ergibt sich mit Hilfe der 1. und 2. Pfadregel:

$$P(\text{«beide Kugeln gleichfarbig»}) = P(rr) + P(bb) = \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{36}{100} + \frac{16}{100} = \frac{52}{100} = 0,52$$

2. Beispiel: Ziehen ohne Zurücklegen

Eine Urne enthält 2 rote und 9 schwarze Kugeln. Es werden 2 Kugeln gleichzeitig gezogen. Das gleichzeitige Ziehen entspricht dem Ziehen ohne Zurücklegen. Man erhält folgendes Baumdiagramm:



Da 2 rote und 9 schwarze, also insgesamt 11 Kugeln in der Urne sind, beträgt die Wahrscheinlichkeit beim 1. Ziehen für rot (r): $\frac{2}{11}$ und für schwarz (s): $\frac{9}{11}$.

Beim 2. Ziehen sind nur noch 10 Kugeln vorhanden und die Wahrscheinlichkeiten hängen davon ab, welche Farbe schon gezogen wurde.

Will man beispielsweise die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass genau eine Kugel schwarz ist, ergibt sich mit Hilfe der 1. und 2. Pfadregel (Produkt- und Summenregel):

$$P(\text{«genau eine schwarze Kugel»}) = P(rs) + P(sr) = \frac{2}{11} \cdot \frac{9}{10} + \frac{9}{11} \cdot \frac{2}{10} = \frac{9}{55} + \frac{9}{55} = \frac{18}{55}$$

Will man die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass mindestens eine der beiden Kugeln schwarz ist, ist es geschickt, das Gegenereignis zu benutzen. Man erhält mit Hilfe des Gegenereignisses:

$$\begin{aligned} P(\text{«mindestens eine schwarze Kugel»}) &= 1 - P(\text{«keine schwarze Kugel»}) \\ &= 1 - P(rr) \\ &= 1 - \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{10} \\ &= 1 - \frac{1}{55} \\ &= \frac{54}{55} \end{aligned}$$

Baumdiagramme

1. Eine Urne enthält n blaue und 6 rote Kugeln.

   a) Es werden 2 Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Wie viele blaue Kugeln müssen sich in der Urne befinden, damit die Wahrscheinlichkeit, höchstens eine blaue Kugel zu ziehen, 0,64 beträgt?

   b) Es werden 3 Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Bestimmen Sie die Anzahl der blauen Kugeln, wenn die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine blaue Kugel zu ziehen, $\frac{19}{27}$ betragen soll.

2. Bei der Produktion von Überraschungseiern treten die folgenden beiden Fehler auf:
   F_1 : falsches Gewicht der Schokoladenhülle
   F_2 : fehlerhafte Verpackung

   F_1 und F_2 treten unabhängig voneinander auf. Ein Ei ist einwandfrei, wenn es keinen der beiden Fehler aufweist, was erfahrungsgemäß bei 90 % der Eier der Fall ist. Erfahrungsgemäß haben 7,5 % der Schokohüllen ein falsches Gewicht.
   Veranschaulichen Sie die Zusammenhänge mit einem Baumdiagramm und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der Fehler F_2 auftritt.

3. In einer Urne sind 3 rote und 3 blaue Kugeln. Es werden 2 Kugeln gezogen.

   a) Prüfen Sie, ob die Wahrscheinlichkeit, dass zwei verschiedenfarbige Kugeln gezogen werden, beim Ziehen mit oder ohne Zurücklegen größer als 50% ist.

   b) Wie viele rote Kugeln müsste man in die Urne dazulegen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass beim zweimaligen Ziehen ohne Zurücklegen die Wahrscheinlichkeit für zwei verschiedenfarbige Kugeln 50% beträgt?

4. Das Büro einer Firma ist durch eine Türsicherung und einen Bewegungsmelder gegen Einbruch gesichert. Nach Werksangaben versagt die Türsicherung in $0,4\,\%$, der Bewegungsmelder in $1,5\,\%$ aller Einbruchsversuche.

   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktionieren beide Sicherungen gleichzeitig?
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Einbrecher ungehindert in das Büro eindringen kann?

   b) Dieses Risiko ist der Firma zu hoch.
   Auf welchen Wert müsste die Wahrscheinlichkeit für das Versagen des Bewegungsmelders verringert werden, damit die Wahrscheinlichkeit für ein ungehindertes Eindringen bei höchstens 1 : 100 000 liegt?