Ökonomische Fragestellungen bei Extremwertproblemen mit Nebenbedingungen

Aufgabe 1:

Betrachten Sie ein Zwei-Produkt-Unternehmen mit den Preis-Absatz-Funktionen $p_1(x_1) = 50 - 0{,}5x_1$ und $p_2(x_2) = 65 - x_2$. Die Kostenfunktion des Unternehmens beträgt $K(x_1, x_2) = 10x_1 + 5x_2 + 100$. Mit x_1 und x_2 sind dabei die hergestellten und abgesetzten Mengen (in ME) und mit p_1 und p_2 die Absatzpreise (in GE pro ME) der betreffenden Produkte bezeichnet. Zudem bezeichnet K die Kosten (in GE) für die Herstellung der Produkte. Für das Unternehmen sind darüber hinaus nur diejenigen Mengenkombinationen realisierbar, welche die Bedingung $2x_1 + 4x_2 = 320$ erfüllen. Das Unternehmen ist bestrebt, den Gesamtgewinn aus der Herstellung und dem Absatz beider Produkte zu maximieren.

a) Formulieren Sie das Maximierungsproblem des Zwei-Produkt-Unternehmens mit Zielfunktion und Nebenbedingung. Stellen Sie dazu den Gesamtgewinn des Unternehmens als Funktion der Absatzmengen dar.

b) Lösen Sie das Maximierungsproblem aus a) mit einer geeigneten Methode. Bestimmen Sie die gewinnmaximierenden Absatzmengen des Unternehmens.

c) Bestimmen Sie die Absatzpreise für beide Produkte und den Gesamtgewinn des Unternehmens im Gewinnmaximum aus b).

Aufgabe 2:

Ein nutzenmaximierender Konsument verteilt sein gesamtes Einkommen in Höhe von $E = 200$ GE auf den Konsum von zwei Konsumgütern X und Y. Die Preise der beiden Konsumgüter belaufen sich auf $p_x = 10$ GE / ME und $p_y = 20$ GE / ME. Der Konsum eines Güterbündels (x,y) stiftet dem Konsumenten einen Nutzen $U(x, y)$, der durch eine kardinale Nutzenfunktion $U(x, y) = x^{0,5}y^{0,5}$ beschrieben werden kann.

a) Formulieren Sie das beschriebene Maximierungsproblem des Konsumenten mit Zielfunktion und Nebenbedingung.

b) Lösen Sie das Maximierungsproblem aus a) mit der Lagrange-Methode. Bestimmen Sie die nutzenmaximierenden Mengen der Konsumgüter X und Y für den Konsumenten.

Aufgabe 3:

Ein nutzenmaximierender Konsument verteilt sein gesamtes Einkommen in Höhe von $E = 170$ GE auf den Konsum von drei Konsumgütern X, Y und Z. Die Preise der Konsumgüter belaufen sich auf $p_x = 1$ GE / ME, $p_y = 2$ GE / ME und $p_z = 4$ GE / ME. Der Konsum eines Güterbündels (x,y,z) stiftet dem Konsumenten einen Nutzen $U(x, y, z)$, der durch eine kardinale Nutzenfunktion $U(x, y, z) = 5x + 10y + 20z - 0{,}5x^2 - 0{,}25y^2 - z^2$ beschrieben werden kann.

a) Formulieren Sie das beschriebene Maximierungsproblem des Konsumenten mit Zielfunktion und Nebenbedingung.

b) Lösen Sie das Maximierungsproblem aus a) mit der Lagrange-Methode. Bestimmen Sie die nutzenmaximierenden Mengen der Konsumgüter X, Y und Z für den Konsumenten.

Aufgabe 4:

Betrachten Sie ein Ein-Produkt-Unternehmen mit der Produktionsfunktion $f(r_1, r_2) = 20 r_1^{0,2} r_2^{0,8}$, wobei mit r_1 und r_2 die eingesetzten Mengen (Inputs) der beiden Produktionsfaktoren (in ME) bezeichnet werden. Mit $f(r_1, r_2)$ wird darüber hinaus die produzierte Menge (Output) des betreffenden Produkts (in ME) bezeichnet. Die Faktorpreise für jeweils eine ME der beiden Produktionsfaktoren betragen $q_1 = 3$ GE / ME und $q_2 = 12$ GE / ME. Das Unternehmen ist bestrebt, einen Output in Höhe von 100 ME zu produzieren, weil diese Menge am Absatzmarkt absetzbar ist. Das Ziel des Unternehmens ist die Produktion des vorgegebenen Outputs zu minimalen Kosten.

a) Formulieren Sie das Minimierungsproblem des Ein-Produkt-Unternehmens mit Zielfunktion und Nebenbedingung.

b) Lösen Sie das Minimierungsproblem aus a) mit der Lagrange-Methode, indem Sie die kostenminimierende Kombination der beiden Produktionsfaktoren zur Herstellung des vorgegebenen Outputs bestimmen.

c) Bestimmen Sie den Wert des Lagrange-Parameters im Kostenminimum aus b). Welche ökonomische Aussagekraft hat der Lagrange-Parameter im vorliegenden Kontext?

Aufgabe 5:

Ein multinationales Unternehmen produziert an drei verschiedenen Standorten das gleiche Produkt. Mit x, y und z werden die Produktionsmengen (in ME) dieser drei Standorte bezeichnet. In den einzelnen Standorten herrschen unterschiedliche Mindestlöhne und andere kostenbeeinflussende Faktoren, so dass die Unternehmenszentrale mit unterschiedlichen Kostenfunktionen für die einzelnen Standorte kalkuliert. Die Kosten K (in GE) für die Herstellung des betreffenden Produkts in den einzelnen Standorten können durch folgende Kostenfunktionen beschrieben werden.

$$K_1(x) = 900 + 4x + \frac{1}{10}x^2 \qquad K_2(y) = 400 + 2y + \frac{1}{40}y^2 \qquad K_3(z) = 700 + 3z + \frac{1}{20}z^2$$

Das multinationale Unternehmen will eine Gesamtproduktion von 2.500 ME erzielen, weil exakt diese Menge durch bestehende langfristige Verträge mit abnehmenden Handelsketten veräußert werden kann. Das Unternehmen ist bestrebt, die Gesamtkosten aus der Herstellung des Produkts in den drei Standorten zu minimieren.

a) Stellen Sie die Gesamtkosten aus der Herstellung des Produkts in den drei Standorten des Unternehmens als Funktion der Produktionsmengen dar.

b) Formulieren Sie das beschriebene Minimierungsproblem des Unternehmens mit Zielfunktion und Nebenbedingung.

c) Lösen Sie das Minimierungsproblem des Unternehmens aus b) mit der Lagrange-Methode, indem Sie die kostenminimierende Kombination der Produktionsmengen für die Herstellung des Produkts in den drei Standorten bestimmen.

d) Welche ökonomische Aussagekraft hat der Lagrange-Parameter im vorliegenden Kontext?

e) Bestimmen Sie die Grenzkostenfunktionen $K_1'(x)$, $K_2'(y)$ und $K_3'(z)$.

f) Welche Werte nehmen die Grenzkosten in den drei Standorten des Unternehmens bei der kostenminimierenden Kombination der Produktionsmengen aus c) an? Welche ökonomische Entscheidungsregel für das Unternehmen lässt sich hieraus ableiten?

Aufgabe 6:

Betrachten Sie ein Ein-Produkt-Unternehmen mit der Produktionsfunktion $f(r_1,r_2) = 55r_1^{0,5}r_2^{0,25}$, wobei mit r_1 und r_2 die eingesetzten Mengen (Inputs) der beiden Produktionsfaktoren (in ME) bezeichnet werden. Mit $f(r_1,r_2)$ wird darüber hinaus die produzierte Menge (Output) des betreffenden Produkts (in ME) bezeichnet. Die Faktorpreise für jeweils eine ME der beiden Produktionsfaktoren betragen $q_1 = 44$ GE / ME und $q_2 = 110$ GE / ME. Das Unternehmen ist bestrebt, mit vorgegebenen Kosten in Höhe von 8.250 GE einen möglichst großen Output zu produzieren.

a) Formulieren Sie das Maximierungsproblem des Ein-Produkt-Unternehmens mit Zielfunktion und Nebenbedingung.

b) Lösen Sie das Maximierungsproblem aus a) mit der Lagrange-Methode, indem Sie die outputmaximierende Kombination der beiden Produktionsfaktoren zur Herstellung des Produkts bei vorgegebenen Kosten bestimmen.

c) Bestimmen Sie den Output des Unternehmens im Outputmaximum aus b).

d) Bestimmen Sie den Wert des Lagrange-Parameters im Outputmaximum aus b). Welche ökonomische Aussagekraft hat der Lagrange-Parameter im vorliegenden Kontext?

Aufgabe 7:

Betrachten Sie ein Ein-Produkt-Unternehmen mit der Produktionsfunktion $f(r_1,r_2) = 0{,}2\,r_1^2\,r_2$, wobei mit r_1 und r_2 die eingesetzten Mengen (Inputs) der beiden Produktionsfaktoren (in ME) bezeichnet werden. Mit $f(r_1,r_2)$ wird darüber hinaus die produzierte Menge (Output) des betreffenden Produkts (in ME) bezeichnet. Die Faktorpreise für jeweils eine ME der beiden Produktionsfaktoren betragen $q_1 = 8$ GE / ME und $q_2 = 2$ GE / ME. Das Unternehmen ist bestrebt, einen Output in Höhe von 400 ME zu produzieren, weil diese Menge am Absatzmarkt absetzbar ist. Das Ziel des Unternehmens ist die Produktion des vorgegebenen Outputs zu minimalen Kosten.

a) Formulieren Sie das Minimierungsproblem des Ein-Produkt-Unternehmens mit Zielfunktion und Nebenbedingung.

b) Lösen Sie das Minimierungsproblem aus a) mit der Lagrange-Methode, indem Sie die kostenminimierende Kombination der beiden Produktionsfaktoren zur Herstellung des vorgegebenen Outputs bestimmen.

c) Bestimmen Sie den Wert des Lagrange-Parameters im Kostenminimum aus b). Welche ökonomische Aussagekraft hat der Lagrange-Parameter im vorliegenden Kontext?

In Abwandlung zur bisherigen Aufgabenstellung ist das Ein-Produkt-Unternehmen nun bestrebt, mit vorgegebenen Kosten in Höhe von 120 GE einen möglichst großen Output zu produzieren. Hierbei unterstellen Sie, dass nach wie vor die oben angegebene Produktionsfunktion des Unternehmens Gültigkeit besitzt. Darüber hinaus sind auch die oben angegebenen Faktorpreise für die beiden Produktionsfaktoren aufzubringen.

d) Formulieren Sie das Maximierungsproblem des Ein-Produkt-Unternehmens mit Zielfunktion und Nebenbedingung.

e) Lösen Sie das Maximierungsproblem aus d) mit der Lagrange-Methode, indem Sie die outputmaximierende Kombination der beiden Produktionsfaktoren zur Herstellung des Produkts bei vorgegebenen Kosten bestimmen.

f) Bestimmen Sie den Wert des Lagrange-Parameters im Outputmaximum aus e). Welche ökonomische Aussagekraft hat der Lagrange-Parameter im vorliegenden Kontext?

Aufgabe 8:

Betrachten Sie ein Ein-Produkt-Unternehmen mit der Produktionsfunktion $f(r_1,r_2) = 20\, r_1^{0,25}\, r_2^{0,75}$, wobei mit r_1 und r_2 die eingesetzten Mengen (Inputs) der beiden Produktionsfaktoren (in ME) bezeichnet werden. Mit $f(r_1,r_2)$ wird darüber hinaus die produzierte Menge (Output) des betreffenden Produkts (in ME) bezeichnet. Die Faktorpreise für jeweils eine ME der beiden Produktionsfaktoren betragen $q_1 = 4$ GE / ME und $q_2 = 12$ GE / ME. Das Unternehmen ist bestrebt, einen Output in Höhe von 80 ME zu produzieren, weil diese Menge am Absatzmarkt absetzbar ist. Das Ziel des Unternehmens ist die Produktion des vorgegebenen Outputs zu minimalen Kosten.

a) Formulieren Sie das Minimierungsproblem des Ein-Produkt-Unternehmens mit Zielfunktion und Nebenbedingung.

b) Lösen Sie das Minimierungsproblem aus a) mit der Lagrange-Methode, indem Sie die kostenminimierende Kombination der beiden Produktionsfaktoren zur Herstellung des vorgegebenen Outputs bestimmen.

Aufgabe 9:

Ein Unternehmen produziert in drei verschiedenen Fabriken das gleiche Produkt. Mit x, y und z werden die Produktionsmengen (in ME) der drei Fabriken bezeichnet. In den einzelnen Fabriken werden unterschiedliche Produktionstechniken eingesetzt, so dass die Unternehmenszentrale von unterschiedlichen Kostenfunktionen in den drei Fabriken ausgehen muss. Die Kosten K (in GE) für die Herstellung des betreffenden Produkts in den einzelnen Fabriken können durch folgende Kostenfunktionen beschrieben werden.

$$K_1(x) = 100 + 25x + \frac{1}{16}x^2 \qquad K_2(y) = 250 + 20y + \frac{1}{24}y^2 \qquad K_3(z) = 150 + 28z + \frac{1}{40}z^2$$

Das Unternehmen will eine Gesamtproduktion von 1.000 ME erzielen, weil exakt diese Menge durch bestehende Liefervereinbarungen mit abnehmenden Vertriebsgesellschaften veräußert werden kann. Das Unternehmen ist bestrebt, die Gesamtkosten aus der Herstellung des Produkts in den drei Fabriken zu minimieren.

a) Stellen Sie die Gesamtkosten aus der Herstellung des Produkts in den drei Fabriken des Unternehmens als Funktion der Produktionsmengen dar.

b) Formulieren Sie das beschriebene Minimierungsproblem des Unternehmens mit Zielfunktion und Nebenbedingung.

c) Lösen Sie das Minimierungsproblem des Unternehmens aus b) mit der Lagrange-Methode, indem Sie die kostenminimierende Kombination der Produktionsmengen für die Herstellung des Produkts in den drei Fabriken bestimmen.

d) Welche ökonomische Aussagekraft hat der Lagrange-Parameter im vorliegenden Kontext?

Aufgabe 10:

Betrachten Sie ein Ein-Produkt-Unternehmen mit der Produktionsfunktion $f(r_1,r_2) = 4\, r_1^2\, r_2$, wobei mit r_1 und r_2 die eingesetzten Mengen (Inputs) der beiden Produktionsfaktoren (in ME) bezeichnet werden. Mit $f(r_1,r_2)$ wird darüber hinaus die produzierte Menge (Output) des betreffenden Produkts (in ME) bezeichnet. Die Faktorpreise für jeweils eine ME der beiden Produktionsfaktoren betragen $q_1 = 12$ GE / ME und $q_2 = 3$ GE / ME. Das Unternehmen ist bestrebt, einen Output in Höhe von 8.000 ME zu produzieren, weil diese Menge am Absatzmarkt absetzbar ist. Das Ziel des Unternehmens ist die Produktion des vorgegebenen Outputs zu minimalen Kosten.

a) Formulieren Sie das Minimierungsproblem des Ein-Produkt-Unternehmens mit Zielfunktion und Nebenbedingung.

b) Lösen Sie das Minimierungsproblem aus a) mit der Lagrange-Methode, indem Sie die kostenminimierende Kombination der beiden Produktionsfaktoren zur Herstellung des vorgegebenen Outputs bestimmen.

c) Bestimmen Sie den Wert des Lagrange-Parameters im Kostenminimum aus b). Welche ökonomische Aussagekraft hat der Lagrange-Parameter im vorliegenden Kontext?