Das Leontief-Modell

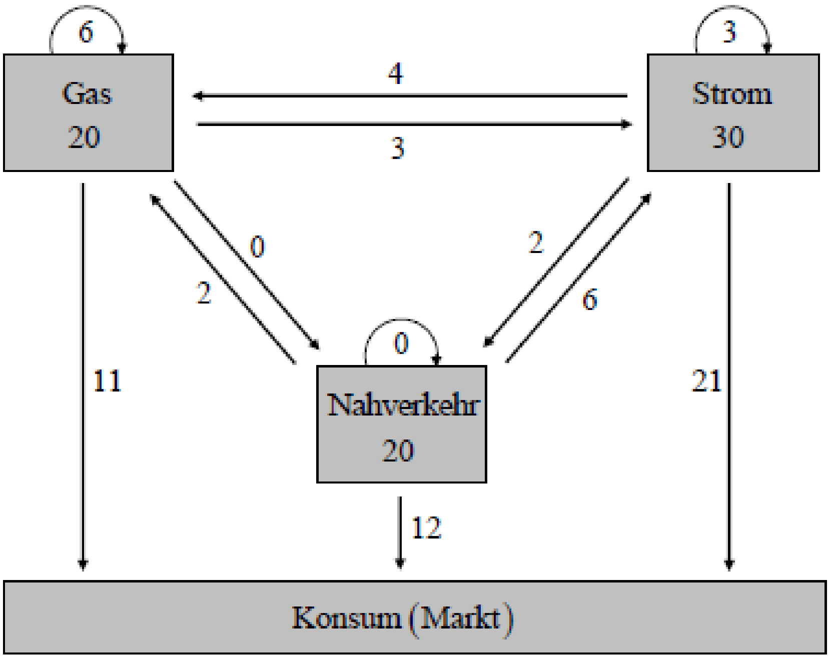
Darstellung des Modells:

An einem einfachen Beispiel sollen die prinzipiellen Zusammenhänge realer Produktionsprozesse beschrieben werden.

In einem Landkreis liegt die Energieversorgung in Form von Gas (G) und Strom (S) sowie der öffentliche Nahverkehr (V) in den Händen der Stadtwerke der Kreisstadt. Die Energieträger Gas und Strom und die Dienstleistung Nahverkehr werden nicht nur an den Endverbraucher abgegeben. Es soll weiter berücksichtigt werden, dass auch jeder der Teilbetriebe Güter benötigt, die von ihm selbst oder einem der anderen Betriebe produziert werden.

Gozintograph der Verflechtungen:

In der untenstehenden Abbildung (Verflechtungsdiagramm) sind die wechselseitige Beeinflussung der einzelnen Teilbetriebe untereinander, die Abgabe der einzelnen Teilbetriebe an die Endverbraucher sowie die Gesamtproduktion für den Zeitraum einer Woche in Werteeinheiten (WE) dargestellt.



Übertrag in eine Tabelle:

Das Verflechtungsdiagramm kann man nun wieder in ein Tabelle übertragen, die dann so aussieht:

	von \ an	Abgabe: Gas	Strom	Nahverkehr	Markt	Gesamt
Herstellung	Gas	6	3	0	11	20
	Strom	4	3	2	21	30
	Nahverkehr	2	6	0	12	20

Die Zahlen in den grünen Zellen beschreiben die Wechselwirkung der jeweiligen Bereiche (Sektoren) untereinander. Sie werden zur ***Verflechtungsmatrix*** zusammengefasst.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Zahlen in den roten Zellen beschreiben den Endverbrauch (*externe Nachfrage*). Sie werden zum ***Konsumvektor***, ***Nachfragevektor*** oder auch ***Marktvektor*** zusammengefasst.

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 11 \\ 21 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Seine Koordinaten geben die Abgabe (Output) des jeweiligen Bereichs an den Markt an.
Da eine Erhöhung der innerbetrieblichen Produktion zu einer erhöhten Abgabe an den Markt führt muss es zwischen den Koeffizienten der Verflechtungsmatrix und den Koordinaten des Marktvektors einen gewissen Zusammenhang geben!

Die Zahlen in den blauen Zellen geben die Produktionszahlen der einzelnen Bereiche an, er wird deshalb auch ***Produktionsvektor*** genannt.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Seine Koordinaten erhält man aus der Summe der Zahlen in der entsprechende Zeile.

$$20 = 6 + 3 + 0 + 11$$
$$30 = 4 + 3 + 2 + 21$$
$$20 = 2 + 6 + 0 + 12$$

Allgemeine Darstellung:

In allgemeiner Notation hat eine Verflechtungstabelle folgendes Aussehen:

Output →

Input ↓	von \ an	Sektor 1	Sektor 2	Sektor 3	Markt	Gesamt
	Sektor 1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	y_1	x_1
	Sektor 2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	y_2	x_2
	Sektor 3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	y_3	x_2

Verflechtungsmatrix

$$A \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

Marktvektor

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Produktionsvektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$x_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13} + y_1$$
$$x_2 = x_{21} + x_{22} + x_{23} + y_2$$
$$x_3 = x_{31} + x_{32} + x_{33} + y_3$$

Übergang zur Inputmatrix bzw. zur technologischen Matrix:

Verändert sich die externe Nachfrage (der Nachfragevektor) y, so muss die Produktion (der Produktionsvektor) $\vec{x}$ diesen Veränderungen so angepasst werden, dass die Nachfrage auch erfüllt werden kann und sich das „System" dabei selbst erhält.
Somit wird es wohl eine Beziehung zwischen dem Konsumvektor $\vec{y}$ und dem Produktionsvektor $\vec{x}$ geben.
Wir wissen, dass sich der Produktionsvektor wie folgt berechnet:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + x_{12} + x_{13} + y_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + y_2 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + y_3 \end{pmatrix}$$

und durch etwas Umformung erhält man:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + x_{12} + x_{13} + y_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + y_2 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + x_{12} + x_{13} \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}}_{\text{Matrix A}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

und jetzt den letzten Term noch etwas umgeformt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{x_{11}}{x_1} & \frac{x_{12}}{x_2} & \frac{x_{13}}{x_3} \\ \frac{x_{21}}{x_1} & \frac{x_{22}}{x_2} & \frac{x_{23}}{x_3} \\ \frac{x_{31}}{x_1} & \frac{x_{32}}{x_2} & \frac{x_{33}}{x_3} \end{pmatrix}}_{\text{Matrix T}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{x} = T \cdot \vec{x} + \vec{y}$$

Die Matrix T heißt ***technologische Matrix*** oder ***Input-Matrix***. Sie gibt den für den Produktionsprozess notwendigen Input an. Die Koeffizienten von T werden auch als ***Produktionskoeffizienten*** bezeichnet.
Die Elemente der Matrix T geben an, wie viele Einheiten von einem Sektor für jede Einheit eines anderen Sektors bereitzustellen sind, damit der wechselseitige Bedarf gedeckt wird.

$\frac{x_{23}}{x_3}$: Dieser Koeffizient gibt an, wie viele Einheiten aus dem Sektor 2 benötigt werden, um einen Einheit aus dem Sektor 3 zu erzeugen.

=> Übertragen auf das Beispiel:

Verflechtungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Produktionsvektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Dann erhält man für die Input-Matrix:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{6}{20} & \frac{3}{30} & 0 \\ \frac{4}{20} & \frac{3}{30} & \frac{2}{20} \\ \frac{2}{20} & \frac{6}{30} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0 \\ 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Wert 0,2 in der 2. Zeile der 1. Spalte sagt nun aus, dass 0,2 Einheiten Strom benötigt werden, um eine Einheit Gas zu erzeugen.

Grundgleichungen zum Modell nach Leontief:

Zwischen dem Konsumvektor $\vec{y}$, dem Produktionsvektor $\vec{x}$ und der Input-Matrix T besteht, wie wir oben schon gesehen haben, ein Zusammenhang:

$$\vec{x} = T \cdot \vec{x} + \vec{y}$$

Nun formt man diese Gleichung ein klein wenig um erhält zunächst:

$$\vec{x} - T \cdot \vec{x} = \vec{y}$$

Ersetzt man den Term $\vec{x}$ mit $E \cdot \vec{x}$ (da ja $E \cdot \vec{x} = \vec{x}$ gilt), so erhält man:

$$E \cdot \vec{x} - T \cdot \vec{x} = \vec{y}$$

Klammert man noch den Vektor $\vec{x}$ aus so erhält man schließlich die Grundgleichung zum Leontief-Modell:

$$\boxed{(E - T) \cdot \vec{x} = \vec{y}}$$

Diese Vektorgleichung stellt somit mit Hilfe der Input-Matrix T eine Beziehung her zwischen dem Produktionsvektor $\vec{x}$ und dem Konsumvektor $\vec{y}$.

Eine externe Nachfrage $\vec{y}$ kann genau dann erfüllt werden, wenn das Gleichungssystem mit den gesuchten Koordinaten x_1, x_2 und x_3 des Produktionsvektors $\vec{x}$ lösbar ist und die Lösungen sämtlich positiv sind.

<u>Bemerkung</u>: Beim Leontief-Modell geht man davon aus, dass sich die ökonomische Struktur auch in dem nächsten zugrunde liegenden Zeitraum nicht ändert. Dies bedeutet, dass die Input-Matrix T als zeitlich konstant angesehen werden kann.