Das Leontief-Modell

Formeln als Grundlage:
Inputmatrix A bzw. technologische Matrix T aus der Input-Output-Tabelle

(1) $$T \cdot \vec{x} + \vec{y} = \vec{x}$$

(2) $$\vec{y} = \vec{x} - T \cdot \vec{x} = (E - T) \cdot \vec{x}$$

(3) $$\vec{x} = (E - T)^{-1} \cdot \vec{y}$$ mit Leontief-Inverse $(E - T)^{-1}$

Produktionsvektor $\vec{x}$ geben.
Wir wissen, dass sich der Produktionsvektor wie folgt berechnet:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + x_{12} + x_{13} + y_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + y_2 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + y_3 \end{pmatrix}$$

und durch etwas Umformung erhält man:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + x_{12} + x_{13} + y_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + y_2 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + x_{12} + x_{13} \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}}_{\text{Matrix A}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

und jetzt den letzten Term noch etwas umgeformt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{x_{11}}{x_1} & \frac{x_{12}}{x_2} & \frac{x_{13}}{x_3} \\ \frac{x_{21}}{x_1} & \frac{x_{22}}{x_2} & \frac{x_{23}}{x_3} \\ \frac{x_{31}}{x_1} & \frac{x_{32}}{x_2} & \frac{x_{33}}{x_3} \end{pmatrix}}_{\text{Matrix T}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{x} = T \cdot \vec{x} + \vec{y}$$

Die Matrix T heißt ***technologische Matrix*** oder ***Input-Matrix***. Sie gibt den für den Produktionsprozess notwendigen Input an. Die Koeffizienten von T werden auch als ***Produktionskoeffizienten*** bezeichnet.
Die Elemente der Matrix T geben an, wie viele Einheiten von einem Sektor für jede Einheit eines anderen Sektors bereitzustellen sind, damit der wechselseitige Bedarf gedeckt wird.

Anmerkung: ***Invertierung von Matrizen*** **=>** **Verfahren über die adjungierte Matrix**

(1) Unterdeterminanten für die jeweiligen Positionen bilden

(2) Transponieren der Matrix

(3) Vorzeichenschema entspr. der Laplace-Entwicklung anwenden

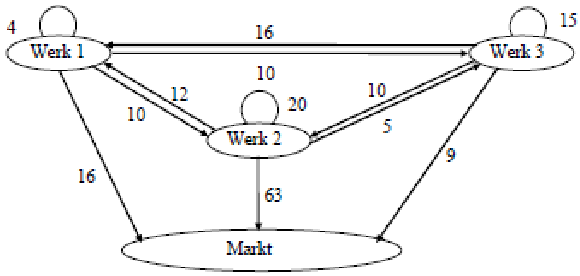
$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

(4) Ergebnis-Matrix mit Kehrwert der Determinante multiplizieren

Beispiel 1

Ein Betrieb umfasst drei Werke. Jedes dieser Werke bietet ein Produkt an, das für einen internen und externen Bedarf herangezogen wird.

Die Güterströme in ME für das aktuelle Jahr werden durch den Gozintographen bzw. Input-Output-Diagramm dargestellt:



In Tabellenform ergibt sich die folgende Darstellung:

von \ an	Werk 1	Werk 2	Werk 3	Markt
Werk 1	4	10	10	16
Werk 2	12	20	5	63
Werk 3	16	10	15	9

Daher ergibt sich nun folgende Gesamtproduktion:

$$\begin{array}{lll} \text{von Werk 1} & 4+10+10+16=40 & = x_1 \\ \text{von Werk 2} & 12+20+5+63=100 & = x_2 \\ \text{von Werk 3} & 16+10+15+9=50 & = x_3 \end{array}$$

und ebenfalls ist bekannt: die an den Markt gelieferten Waren(mengeneinheiten)

$$\begin{array}{lll} \text{von Werk 1} & 16 & = y_1 \\ \text{von Werk 2} & 63 & = y_2 \\ \text{von Werk 3} & 9 & = y_3 \end{array}$$

Somit stellen sich zwei grundlegende Fragen:

a) Welche Mengen $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$ können an den Markt abgegeben werden, wenn ein Produktionsvektor,

z.B. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix}$ vorgegeben wird?

b) Welche Gesamtproduktion $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$ muss eingeplant werden, wenn die Marktnachfrage,

z.B. $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$ vorgegeben wird?

Um diese beiden Fragestellungen zu beantworten stellt man eine (Matrizen)gleichung auf, die einen

allgemeinen Zusammenhang zwischen Produktionsvektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und Marktabgabevektor $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ beschreibt.

Dazu bezieht man alle Güterströme auf einen **Output** von jeweils 1 ME von Werk 1, Werk 2 und Werk 3.

Z.B. benötigt Werk 1 für einen Output von 40 ME an Produkt 1

von Werk 1 4 ME
von Werk 2 12 ME
von Werk 3 16 ME

Für einen Output von 1 ME wird jeweils nur noch der vierzigste Teil benötigt:

von Werk 1 $\frac{4}{40}$ ME

von Werk 2 $\frac{12}{40}$ ME

von Werk 3 $\frac{16}{40}$ ME

Für einen Output von x_1 ME benötigt Werk 1 dann:

von Werk 1 $\frac{4}{40} \cdot x_1$ ME

von Werk 2 $\frac{12}{40} \cdot x_1$ ME

von Werk 3 $\frac{16}{40} \cdot x_1$ ME

Entsprechend lassen sich der Bedarf von Werk 2 auf einen Output von x_2 ME und der Bedarf von Werk 3 auf einen Output von x_3 ME umrechnen:

Für einen Output von x_2 ME benötigt Werk 2:

von Werk 1 $\frac{10}{100} \cdot x_2$ ME

von Werk 2 $\frac{20}{100} \cdot x_2$ ME

von Werk 3 $\frac{10}{100} \cdot x_2$ ME

Für einen Output von x_3 ME benötigt Werk 3:

von Werk 1 $\frac{10}{50} \cdot x_3$ ME

von Werk 2 $\frac{5}{50} \cdot x_3$ ME

von Werk 3 $\frac{15}{50} \cdot x_3$ ME

Allgemeingültige Gleichungen erhält man, wenn man wie zu Beginn die Bilanzen für die drei Produkte aufstellt:

- Einerseits werden x_1 ME von Produkt 1 durch das Werk 1 produziert.
- Andererseits werden $\frac{4}{40} \cdot x_1$ ME von Werk 1 selbst, $\frac{10}{100} \cdot x_2$ ME von Werk 2, $\frac{10}{50} \cdot x_3$ ME von Werk 3 und schließlich y_1 ME durch den Markt verbraucht.

Wenn Produktion und Verbrauch gleich sein sollen, muss also gelten

$$\frac{4}{40} \cdot x_1 + \frac{10}{100} \cdot x_2 + \frac{10}{50} \cdot x_3 + \cdot y_1 \quad = x_1$$

Die Bilanz für das Produkt 2 ist dann

$$\frac{12}{40} \cdot x_1 + \frac{20}{100} \cdot x_2 + \frac{5}{50} \cdot x_3 + \cdot y_2 \quad = x_2$$

Die Bilanz für Produkt 3 ist

$$\frac{16}{40} \cdot x_1 + \frac{10}{100} \cdot x_2 + \frac{15}{50} \cdot x_3 + \cdot y_3 \quad = x_3$$

Durch Übergang zur Matrizenschreibweise erhält man eine Gleichung, die sich entweder

a) nach der gesuchten Marktnachfrage $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ oder

b) nach den gesuchten Produktionszahlen $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ auflösen lässt:

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{40} & \frac{10}{100} & \frac{10}{50} \\ \frac{12}{40} & \frac{20}{100} & \frac{5}{50} \\ \frac{16}{40} & \frac{10}{100} & \frac{15}{50} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

(1) $$T \cdot \vec{x} + \vec{y} = \vec{x} \quad \xrightarrow{-T \cdot \vec{x}}$$

(2) $$\vec{y} = \vec{x} - T \cdot \vec{x} = (E - T) \cdot \vec{x}$$

Damit erhält man als Lösung zu Frage a)

$$\vec{y} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,4 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 22 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Nun die Antwort zu Frage b)

(2) $$\vec{y} = (E-T)\cdot\vec{x} \xrightarrow{\cdot(E-T)^{-1}}$$

(3) $$\vec{x} = (E-T)^{-1}\cdot\vec{y}$$ mit Leontief-Inverse $(E-T)^{-1}$

$$\vec{x} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,4 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}\right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \frac{1}{40}\begin{pmatrix} 55 & 9 & 17 \\ 25 & 55 & 15 \\ 35 & 13 & 69 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 40 \\ 48 \end{pmatrix}$$

Anmerkung:

Da die Fragestellung b) sehr häufig auftritt, hat die dabei benutzte Matrix

$$(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,4 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,1 & -0,2 \\ -0,3 & 0,8 & -0,1 \\ -0,4 & -0,1 & 0,7 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{40}\begin{pmatrix} 55 & 9 & 17 \\ 25 & 55 & 15 \\ 35 & 13 & 69 \end{pmatrix}$$

einen feststehenden Namen erhalten und heißt Leontief-Inverse.