Das Leontief-Modell

Formeln als Grundlage:
Inputmatrix bzw. technologische Matrix T aus der Input-Output-Tabelle

(1) $T \cdot \vec{x} + \vec{y} = \vec{x}$

(2) $\vec{y} = \vec{x} - T \cdot \vec{x} = (E - T) \cdot \vec{x}$

(3) $\vec{x} = (E - T)^{-1} \cdot \vec{y}$ mit Leontief-Inverse $(E - T)^{-1}$

Produktionsvektor $\vec{x}$ geben.
Wir wissen, dass sich der Produktionsvektor wie folgt berechnet:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + x_{12} + x_{13} + y_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + y_2 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + y_3 \end{pmatrix}$$

und durch etwas Umformung erhält man:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + x_{12} + x_{13} + y_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + y_2 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + x_{12} + x_{13} \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}}_{\text{Matrix A}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

und jetzt den letzten Term noch etwas umgeformt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{x_{11}}{x_1} & \frac{x_{12}}{x_2} & \frac{x_{13}}{x_3} \\ \frac{x_{21}}{x_1} & \frac{x_{22}}{x_2} & \frac{x_{23}}{x_3} \\ \frac{x_{31}}{x_1} & \frac{x_{32}}{x_2} & \frac{x_{33}}{x_3} \end{pmatrix}}_{\text{Matrix T}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{x} = T \cdot \vec{x} + \vec{y}$$

Die Matrix T heißt ***technologische Matrix*** oder ***Input-Matrix***. Sie gibt den für den Produktionsprozess notwendigen Input an. Die Koeffizienten von T werden auch als ***Produktionskoeffizienten*** bezeichnet.
Die Elemente der Matrix T geben an, wie viele Einheiten von einem Sektor für jede Einheit eines anderen Sektors bereitzustellen sind, damit der wechselseitige Bedarf gedeckt wird.

Anmerkung: ***Invertierung von Matrizen*** **=>** **Verfahren über die adjungierte Matrix**

(1) Unterdeterminanten für die jeweiligen Positionen bilden

(2) Transponieren der Matrix

(3) Vorzeichenschema entspr. der Laplace-Entwicklung anwenden

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

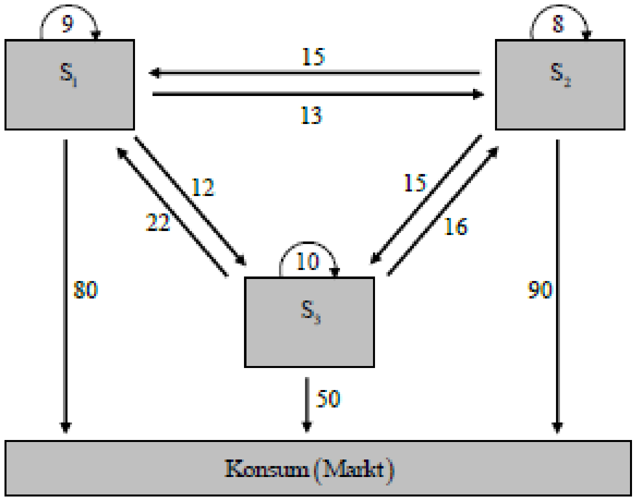
(4) Ergebnis-Matrix mit Kehrwert der Determinante multiplizieren

Aufgaben

1.0 Die gegenseitige Verflechtung dreier Sektoren S_1, S_2 und S_3 einer Volkswirtschaft sind gemäß dem folgenden Verflechtungsdiagramm untereinander mit dem Markt verflochten.

1.1 Wie viele Einheiten werden von den einzelnen Sektoren insgesamt produziert?

1.2 Erstellen Sie eine vollständige Verflechtungstabelle mit Input, Output, Marktabgabe und Gesamtproduktion.



Lösung: **Gesamt-Verflechtung**

Output →

Input

	S_1	S_2	S_3	Markt y_i	Gesamt x_i
S_1	9	13	12	80	114
S_2	15	8	15	90	128
S_3	22	16	10	50	98

2.0 Die Teilbetriebe A, B und C einer Fabrik sind untereinander und mit dem Markt verflochten. Die Verflechtung wird durch folgende Tabelle beschrieben.

Output →

Input ↓

von \ an	A	B	C	Markt	Gesamt
A	12	a	0	18	35
B	10	5	8	b	48
C	15	20	10	20	c

2.1 Bestimmen Sie die fehlenden Angaben in der Tabelle.

2.2 Stellen Sie die Verflechtung der Betriebe untereinander und mit dem Markt in Form eines Verflechtungsdiagramms dar.

Lösung: **Ergänzung der Tabelle:** **a = 5** **b = 25** **c = 65**

3.0 Drei Sektoren einer Volkswirtschaft sind nach dem Leontief-Modell untereinander und mit dem Markt verflochten.
Die gegenseitige Verflechtung und die Gesamtproduktion werden durch folgende Tabelle beschrieben.

von \ an	S_1	S_2	S_3	Gesamt
S_1	50	25	0	200
S_2	15	20	30	100
S_3	45	0	15	150

3.1 Berechnen Sie den Konsumvektor.
3.2 Bestimmen Sie die Input-Matrix.

Lösung:

	S_1	S_2	S_3	Markt y_i	Gesamt x_i
S_1	50	25	0	y_1	200
S_2	15	20	30	y_2	100
S_3	45	0	15	y_3	150

$$\xrightarrow{y_i = x_i - \sum_{j=1}^{3} S_{ij}}$$

	S_1	S_2	S_3	Markt y_i	Gesamt x_i
S_1	50	25	0	$y_1 = 200 - 75 = 125$	200
S_2	15	20	30	$y_2 = 100 - 65 = 35$	100
S_3	45	0	15	$y_3 = 150 - 60 = 90$	150

$$\rightarrow \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 125 \\ 35 \\ 90 \end{pmatrix}$$

Input-Matrix bzw. Technologische Matrix

Ausgangspunkt: Verflechtungsmatrix A

$$A = \begin{pmatrix} 50 & 25 & 0 \\ 15 & 20 & 30 \\ 45 & 0 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{\vec{x} = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 150 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \frac{50}{200} & \frac{25}{100} & 0 \\ \frac{15}{200} & \frac{20}{100} & \frac{30}{150} \\ \frac{45}{200} & 0 & \frac{15}{150} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,25 & 0 \\ 0,075 & 0,2 & 0,2 \\ 0,225 & 0 & 0,1 \end{pmatrix} = T$$

4.0 Drei Sektoren einer Volkswirtschaft sind nach dem Leontief-Modell untereinander und mit dem Markt verflochten.
Die Input-Matrix T, der Produktionsvektor $\vec{x}$ und der Konsumvektor $\vec{y}$ sind gegeben durch:

$$T = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ a & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} b \\ 60 \\ 100 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ c \end{pmatrix}$$

Welche Bedeutung haben die Koeffizienten a, b und c?

Lösung:

a = Produktionskoeffizient von Sektor S3 zur Deckung des Bedarfs von einer Mengeneinheit des Sektors S1

⇨ Wie viele Mengeneinheiten werden von S3 benötigt, um eine Mengeneinheit von S1 herzustellen?

b = Produktionsmenge des Sektors S1

c = externe Nachfrage bzw. Marktnachfrage von Produkten des Sektors S3

5.0 Drei Teilbereiche A, B und C eines Werks sind nach dem Leontief-Modell untereinander und mit dem Markt verflochten. Die Input-Matrix ist

$$T = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0 \\ 0,25 & 0,1 & 0,15 \\ 0,2 & 0,15 & 0,25 \end{pmatrix}$$

Für den nächsten Zeitraum können in den einzelnen Betrieben Mengeneinheiten hergestellt werden, die gegeben sind durch den Produktionsvektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 50 \\ 80 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Welche Nachfrage(menge) kann im gefragten Produktionszeitraum befriedigt werden?

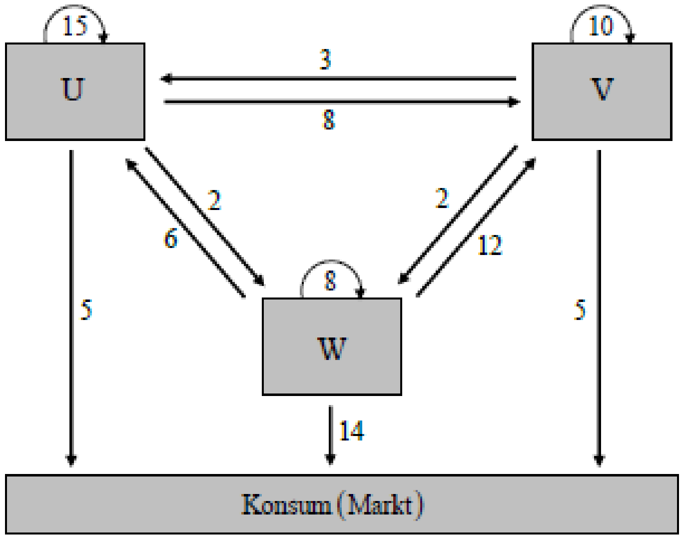
Lösung:

$$\vec{y} = \vec{x} - T \cdot \vec{x} = (E - T) \cdot \vec{x}$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 50 \\ 80 \\ 100 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0 \\ 0,25 & 0,1 & 0,15 \\ 0,2 & 0,15 & 0,25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 80 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,2 & 0 \\ -0,25 & 0,9 & -0,15 \\ -0,2 & -0,15 & 0,75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 80 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 44,5 \\ 53 \end{pmatrix}$$

6.0 Die drei Teilbetriebe eines Industrieunternehmens sind nach dem Leontief-Modell untereinander und mit dem Markt verflochten.
Das folgende Diagramm zeigt die gegenseitige Verflechtung der einzelnen Teilbetriebe und die Gesamtproduktion



6.1 Erstellen Sie eine Verflechtungstabelle. Geben Sie den Produktionsvektor $\vec{x}$ und die Verflechtungsmatrix A an

6.2 Bestimmen Sie die Input-Matrix T.

6.3 Zu einem früheren Zeitpunkt betrug der Marktvektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 1{,}5 \\ 14 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie den zugehörigen Produktionsvektor $\vec{x}$.

Lösung: **Gesamt-Verflechtung**

Output

Input

	U	V	W	$Markt\ y_i$	$Gesamt\ x_i$
U	15	8	2	5	30
V	3	10	2	5	20
W	6	12	8	14	40

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 2 \\ 3 & 10 & 2 \\ 6 & 12 & 8 \end{pmatrix} \quad und \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 2 \\ 3 & 10 & 2 \\ 6 & 12 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \frac{15}{30} & \frac{8}{20} & \frac{2}{40} \\ \frac{3}{30} & \frac{10}{20} & \frac{2}{40} \\ \frac{6}{30} & \frac{12}{20} & \frac{8}{40} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \end{pmatrix} = T$$

$$\vec{x} = (E - T)^{-1} \cdot \vec{y}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}4 & -0{,}05 \\ -0{,}1 & 0{,}5 & -0{,}05 \\ -0{,}2 & -0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 1{,}5 \\ 14 \end{pmatrix} = \frac{1}{141} \begin{pmatrix} 370 & 350 & 45 \\ 90 & 390 & 30 \\ 160 & 380 & 210 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 1{,}5 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix}$$

7.0 Drei Werke W_1, W_2 und W_3 einer Firma sind nach dem Leontief-Modell untereinander und mit dem Markt verflochten. Die gegenseitigen und für den Markt erbrachten Leistungen enthält die folgende Tabelle.

von \ an	W_1	W_2	W_3	Gesamt
W_1	0	50	15	335
W_2	80	0	45	125
W_3	40	25	0	85

7.1 Erläutern Sie, welche besondere Form die Verflechtungstabelle besitzt.

7.2 Bestimmen Sie die Input-Matrix.

7.3 Berechnen Sie den Vektor $\vec{x}$ für den Nachfragevektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} 70 \\ 82 \\ 152 \end{pmatrix}$.

Lösung:

Es gibt keinen Eigenbedarf bei den drei Produktionssektoren.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 15 \\ 80 & 0 & 45 \\ 40 & 25 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\vec{x} = \begin{pmatrix} 335 \\ 125 \\ 85 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 & \frac{50}{125} & \frac{15}{85} \\ \frac{80}{335} & 0 & \frac{45}{85} \\ \frac{40}{335} & \frac{25}{125} & 0 \end{pmatrix} = T$$

$$\vec{x} = (E - T)^{-1} \cdot \vec{y}$$

$$\vec{x} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{50}{125} & \frac{15}{85} \\ \frac{80}{335} & 0 & \frac{45}{85} \\ \frac{40}{335} & \frac{25}{125} & 0 \end{pmatrix} \right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 70 \\ 82 \\ 152 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{50}{125} & -\frac{15}{85} \\ -\frac{80}{335} & 1 & -\frac{45}{85} \\ -\frac{40}{335} & -\frac{25}{125} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 70 \\ 82 \\ 152 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 211,47 \\ 253,14 \\ 227,88 \end{pmatrix}$$

Nebenrechnung zur Leontief-Inversen:

$$\begin{bmatrix} \frac{1273}{1059} & \frac{2479}{4236} & \frac{737}{1412} \\ \frac{430}{1059} & \frac{5575}{4236} & \frac{1085}{1412} \\ \frac{238}{1059} & \frac{1411}{4236} & \frac{1717}{1412} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 70 \\ 82 \\ 152 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 211.4707271 \\ 253.1421152 \\ 227.8786591 \end{bmatrix}$$