

- 1.) Gegeben sind folgende Matrizen einer Produktionsserie:

$$M_{RZ} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad M_{ZE} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

- a) Bestimmen Sie die Matrix  $M_{RE}$ .

Wir erhalten einen Auftrag an Endprodukten von  $e = (20, 10)$

- b) Wie viele Rohstoffe Rohstoffe und wie viele Zwischenprodukte benötigen wir zur Erfüllung des Auftrages?

Wir haben eine Rohstoffvorrat von  $(620, 660, 920)$

- c) Wie viele Endprodukte können wir herstellen, wenn danach das Lager vollkommen leer ist?

- 2.) Die Unternehmung Armes Brot AG verarbeitet die Materialien  $M_1, M_2$  und  $M_3$  zu den Zwischenprodukten  $Z_1, Z_2$  und  $Z_3$  und diese Zwischenprodukte zu den Endprodukten  $E_1, E_2$  und  $E_3$ . Die folgenden Matrizen stellen die Materialverflechtungen dar:

$$M_{MZ} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad M_{ZE} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) Wie viele Materialien werden pro Endprodukt gebraucht?

- b) Die Firma erhält einen Auftrag vom Umfang  $(10 \ 25 \ 20)$ .  
Der Vorrat an **Zwischenprodukten** beträgt  $(200 \ 100 \ 85)$ .  
**Prüfen Sie, ob der vorhandene Bestand genügt bzw. ob nachbestellt** werden muss.

- c) Der Vorrat an **Zwischenprodukten** beträgt nun  $(130 \ 70 \ 60)$ .  
Unser Chef Rudi Nutzlos will nun wissen, wie viele Endprodukte wir herstellen können, wenn wir unser Zwischenproduktlager komplett leeren würden.

- d) Die Unternehmung hatte Endprodukte im Mengenverhältnis  $3 : 2 : 1$  gefertigt und dabei 1.350 ME von  $M_3$  verarbeitet.  
Wie viele ME der anderen beiden Materialien wurden benötigt?

Weitere Übungen:

Aufgabe 3:

Ein Bäckereiunternehmen verbraucht im Jahr bestimmte Mengen an Weizenmehl (W), Roggenmehl (R), Weizenschrot (WS), Sesam (S) und Sonnenblumenkernen (SK) zu Preisen von 250 €/ME für W, 300 €/ME für R, 280 €/ME für WS, 450 €/ME für S und 800 €/ME für SK in seinen drei Filialen A, B und C. Die Verbrauchszahlen (in ME) in den Filialen sind der folgenden Tabelle zu entnehmen.

	A	B	C
W	2	2,5	3
R	1,8	2	2,8
WS	0,8	2	2,5
S	0,1	0,2	0,2
SK	0,2	0,3	0,4

Bestimmen Sie die Rohstoffkosten in den drei Filialen.

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1,8 & 0,8 & 0,1 & 0,2 \\ 2,5 & 2 & 2 & 0,2 & 0,3 \\ 3 & 2,8 & 2,5 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 250 \\ 300 \\ 280 \\ 450 \\ 800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.469 \\ 2.115 \\ 2.700 \end{pmatrix}$$

Die Rohstoffkosten des Bäckereiunternehmens belaufen sich auf 1.469 GE in Filiale A, 2.115 GE in Filiale B und 2.700 GE in Filiale C.

Aufgabe 4:

Ein landwirtschaftlicher Betrieb baut Mais (M), Zuckerrüben (Z), Kartoffeln (K) und Weizen (W) an. Zur Bearbeitung der Felder werden drei Maschinen A, B und C eingesetzt. Die Betriebsstunden der drei Maschinen pro ha Anbaufläche sind in der folgenden Tabelle aufgeführt. Die Kosten für eine Maschinenstunde betragen 60 € bei Maschine A, 25 € bei Maschine B und 18 € bei Maschine C.

	A	B	C
M	3	5	10
Z	2	2	8
K	6	0	12
W	4	4	15

- Bestimmen Sie die Maschinenkosten pro ha für die vier Anbauarten.
- Im laufenden Jahr werden 15 ha Mais, 8 ha Zuckerrüben, 12 ha Kartoffeln und 6 ha Weizen angebaut. Wie lange werden die einzelnen Maschinen eingesetzt?
- Welche Maschinenkosten entstehen bei der Lösung aus b)?

Lösung:

$$a) \begin{pmatrix} 3 & 5 & 10 \\ 2 & 2 & 8 \\ 6 & 0 & 12 \\ 4 & 4 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 25 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 485 \\ 314 \\ 576 \\ 610 \end{pmatrix}$$

Die Maschinenkosten belaufen sich auf 485 €/ha für Mais, 314 €/ha für Zuckerrüben, 576 €/ha für Kartoffeln und 610 €/ha für Weizen.

$$b) (15 \ 8 \ 12 \ 6) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 10 \\ 2 & 2 & 8 \\ 6 & 0 & 12 \\ 4 & 4 & 15 \end{pmatrix} = (157 \ 115 \ 448)$$

Maschine A wird im laufenden Jahr 157 h, Maschine B 115 h und Maschine C 448 h eingesetzt.

$$c) (157 \ 115 \ 448) \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 25 \\ 18 \end{pmatrix} = 20.359$$

Die Maschinenkosten bei der Lösung aus b) belaufen sich auf 20.359 €.

### Aufgabe 5:

In einer Möbelfabrik werden Stühle, Tische und Schränke auf drei Maschinen A, B und C hergestellt. Die Maschinenzeiten zur Herstellung einer Produkteinheit sind der folgenden Tabelle zu entnehmen.

	A	B	C
Stuhl	5	3	4
Tisch	15	18	20
Schrank	30	45	50

- Welche Maschinenzeiten werden in der Möbelfabrik zur Herstellung von 200 Stühlen, 50 Tischen und 30 Schränken benötigt?
- Die Kosten pro Zeiteinheit und Maschine belaufen sich auf 20 GE für Maschine A, 22 GE für Maschine B und 28 GE für Maschine C. Welche Kosten verursacht die Produktion aus a)?
- Welche Kosten verursacht jeweils eine Einheit der drei Möbelstücke?

Lösung:

$$a) \begin{pmatrix} 200 & 50 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 15 & 18 & 20 \\ 30 & 45 & 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.650 & 2.850 & 3.300 \end{pmatrix}$$

Die Maschinenzeiten belaufen sich auf 2.650 Zeiteinheiten für Maschine A, 2.850 Zeiteinheiten für Maschine B und 3.300 Zeiteinheiten für Maschine C.

$$b) \begin{pmatrix} 2.650 & 2.850 & 3.300 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 22 \\ 28 \end{pmatrix} = 208.100$$

Die Produktion aus a) verursacht Kosten in Höhe von 208.100 GE.

$$c) \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 15 & 18 & 20 \\ 30 & 45 & 50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 22 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 278 \\ 1.256 \\ 2.990 \end{pmatrix}$$

Ein Stuhl verursacht Kosten von 278 GE/ME. Ein Tisch verursacht Kosten von 1.256 GE/ME. Ein Schrank verursacht Kosten von 2.990 GE/ME.

### Aufgabe 6:

In einer pharmazeutischen Fabrik werden in einem ersten Produktionsvorgang aus den Rohstoffen  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  und  $R_4$  die Zwischenprodukte  $ZP_1$ ,  $ZP_2$  und  $ZP_3$  hergestellt. Aus den Zwischenprodukten werden anschließend in einem zweiten Produktionsvorgang die Endprodukte  $EP_1$  und  $EP_2$  erstellt. Der Bedarf an Rohstoffen und Zwischenprodukten (in ME) zur Herstellung von jeweils einer ME auf der nachgelagerten Produktionsstufe ergibt sich aus den folgenden beiden Tabellen.

	$ZP_1$	$ZP_2$	$ZP_3$
$R_1$	3	3	2
$R_2$	2	5	1
$R_3$	4	1	5
$R_4$	5	2	2

	$EP_1$	$EP_2$
$ZP_1$	5	2
$ZP_2$	2	3
$ZP_3$	2	7

Welche Rohstoffmengen benötigt die pharmazeutische Fabrik zur Herstellung von 100 ME von  $EP_1$  und 50 ME von  $EP_2$ ?

Lösung: Es werden 3.950 ME von  $R_1$ , 3.500 ME von  $R_2$ , 5.500 ME von  $R_3$  und 4.800 ME von  $R_4$  benötigt.

Aufgabe 7:

Zur Herstellung von vier Zwischenprodukten  $ZP_1$ ,  $ZP_2$ ,  $ZP_3$  und  $ZP_4$  werden in einem Unternehmen drei Rohstoffe  $R_1$ ,  $R_2$  und  $R_3$  benötigt. Aus den Zwischenprodukten werden fünf Endprodukte  $EP_1$ ,  $EP_2$ ,  $EP_3$ ,  $EP_4$  und  $EP_5$  hergestellt. Der Bedarf an Rohstoffen und Zwischenprodukten (in ME) zur Herstellung von jeweils einer ME auf der nachgelagerten Produktionsstufe kann den folgenden beiden Tabellen entnommen werden.

	$ZP_1$	$ZP_2$	$ZP_3$	$ZP_4$
$R_1$	1	2	1	2
$R_2$	2	1	0	3
$R_3$	1	1	2	0

	$EP_1$	$EP_2$	$EP_3$	$EP_4$	$EP_5$
$ZP_1$	1	0	2	1	2
$ZP_2$	2	1	2	1	0
$ZP_3$	3	1	1	2	1
$ZP_4$	0	2	1	0	3

- Bestimmen Sie den Rohstoffbedarf für die fünf Endprodukte in Matrizenform.
- Welche Rohstoffmengen benötigt man zur Herstellung von 5 ME von  $EP_1$ , 10 ME von  $EP_2$ , 20 ME von  $EP_3$ , 15 ME von  $EP_4$  und 30 ME von  $EP_5$ ?
- Welche Rohstoffkosten ergeben sich bei der Lösung aus b), wenn die Rohstoffkosten 8 GE pro ME von  $R_1$ , 12 GE pro ME von  $R_2$  und 5 GE pro ME von  $R_3$  betragen?

Lösung:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 3 & 13 \\ 9 & 3 & 6 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Die resultierende Matrix beschreibt den Rohstoffbedarf für die fünf Endprodukte.

$$b) \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 3 & 13 \\ 9 & 3 & 6 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 20 \\ 15 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 635 \\ 705 \\ 405 \end{pmatrix}$$

Es werden 635 ME von  $R_1$ , 705 ME von  $R_2$  und 405 ME von  $R_3$  benötigt.

$$c) (635 \ 705 \ 405) \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} = 15.565$$

Die Rohstoffkosten bei der Lösung aus b) belaufen sich auf 15.565 GE.

Aufgabe 8:

Ein Unternehmen der Spielwarenindustrie stellt zwei Produkte  $P_1$  und  $P_2$  aus fünf Rohstoffen  $R_1, R_2, R_3, R_4$  und  $R_5$  gemäß folgender Verbrauchstabelle her.

	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	$R_5$
$P_1$	2	2	4	1	2
$P_2$	4	3	2	4	3

Die Rohstoffkosten des Unternehmens betragen 3 GE pro ME von  $R_1$ , 4 GE pro ME von  $R_2$ , 2 GE pro ME von  $R_3$ , 3 GE pro ME von  $R_4$  und 5 GE pro ME von  $R_5$ . Die Fertigungskosten betragen 25 GE pro ME für die Produktion von  $P_1$  und 35 GE pro ME für die Produktion von  $P_2$ . Die Verkaufsmengen der beiden Produkte in den vier Filialen  $F_1, F_2, F_3$  und  $F_4$  des Spielwarenherstellers können der folgenden Tabelle entnommen werden.

	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$
$P_1$	18	25	23	16
$P_2$	22	17	19	24

Die Verkaufspreise der beiden Produkte belaufen sich auf 120 GE pro ME von  $P_1$  und 160 GE pro ME von  $P_2$ . Bestimmen Sie den Gewinn des Spielwarenherstellers getrennt nach Filialen.

Lösung: \_

$$\text{Kosten: } \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 \\ 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 55 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 \\ 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 90 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gewinn: } \begin{pmatrix} 18 & 22 \\ 25 & 17 \\ 23 & 19 \\ 16 & 24 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 120 \\ 160 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 60 \\ 90 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 18 & 22 \\ 25 & 17 \\ 23 & 19 \\ 16 & 24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.620 \\ 2.690 \\ 2.710 \\ 2.640 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9:

Auf einem Markt konkurrieren drei Produkte A, B und C. Auf Grund langjähriger Erhebungen von Marktforschungsinstituten lässt sich ein Wechselverhalten der Konsumenten von einer Woche zur nächsten Woche prognostizieren, welches aus der folgenden Tabelle ersichtlich wird.

	Von Produkt A	Von Produkt B	Von Produkt C
Zu Produkt A	0,7	0,3	0,1
Zu Produkt B	0,1	0,6	0,1
Zu Produkt C	0,2	0,1	0,8

Bestimmen Sie ausgehend von Marktanteilen in Höhe von 30 % für Produkt A, 45 % für Produkt B und 25 % für Produkt C die Marktanteile in den folgenden drei Wochen.



Lösung:

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 45 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ 32,5 \\ 30,5 \end{pmatrix}$$

37 % kaufen Produkt A, 32,5 % kaufen Produkt B und 30,5 % kaufen Produkt C.

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 37 \\ 32,5 \\ 30,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38,7 \\ 26,25 \\ 35,05 \end{pmatrix}$$

38,7 % kaufen Produkt A, 26,25 % kaufen Produkt B und 35,05 % kaufen Produkt C.

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 38,7 \\ 26,25 \\ 35,05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38,47 \\ 23,125 \\ 38,405 \end{pmatrix}$$

38,47 % kaufen Produkt A, 23,125 % kaufen Produkt B und 38,405 % kaufen Produkt C.

Aufgabe 10:

Bei politischen Wahlen kandidieren in einem Wahlkreis traditionell nur drei Parteien A, B und C. Auf Grund langjähriger Untersuchungen von Meinungsforschungsinstituten können die Wählerströme zwischen den Parteien A, B und C bei zukünftigen Wahlen durch folgende Tabelle dargestellt werden.

	Von Partei A	Von Partei B	Von Partei C
Zu Partei A	0,8	0,2	0,2
Zu Partei B	0,1	0,7	0,3
Zu Partei C	0,1	0,1	0,5

Bei der bislang letzten stattgefundenen Wahl entfielen 40 % der Stimmen auf Partei A, 50 % auf Partei B und 10 % auf Partei C. Wie lauten die nächsten drei Wahlergebnisse?

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,7 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 \\ 42 \\ 14 \end{pmatrix}$$

44 % wählen Partei A, 42 % wählen Partei B und 14 % wählen Partei C.

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,7 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 44 \\ 42 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46,4 \\ 38 \\ 15,6 \end{pmatrix}$$

46,4 % wählen Partei A, 38 % wählen Partei B und 15,6 % wählen Partei C.

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,7 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 46,4 \\ 38 \\ 15,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47,84 \\ 35,92 \\ 16,24 \end{pmatrix}$$

47,84 % wählen Partei A, 35,92 % wählen Partei B und 16,24 % wählen Partei C.