

# Übung Klausuraufgaben (19.11.2020)

## (1) Matrizen und Vektoren: Übergangsmatrizen & Statisches Gleichgewicht

„Horch“ ist einer der weltgrößten Automobilhersteller. Bei Firmenkunden ist besonders das Luxusmodell „H-Hurtig“ gefragt. Dieses wird wahlweise mit Kraftstoff- oder Erdgasantrieb angeboten. Die meisten Kunden leasen ein Fahrzeug für jeweils ein Jahr und wechseln anschließend auf ein neueres Modell. Dabei kann die Antriebstechnik immer wieder neu zwischen den Varianten Benzin, Diesel und Erdgas gewählt werden.

Die bisherigen Kunden eines Benzinmodells wählen zu 60 % beim nächsten Fahrzeug wieder ein Benzinmodell, 15 % wechseln zur Dieselfahrer. Von den bisherigen Dieselfahrern bleiben 75 % bei dieser Technik, 5 % testen den Erdgasantrieb.

Erdgasfans bleiben aus Umweltschutzgründen zu 80 % ihrer vorherigen Wahl treu, 15 % entscheiden sich für Benzin, der Rest wählt Diesel.

Im Jahr 2018 konnte man folgende Verteilung der einzelnen Antriebsarten feststellen: Benzin: 28 % Diesel: 60 % Erdgas: 12 %

- 1.) Erstellen Sie die Übergangsmatrix.
- 2.) Welche Anteile sind 2019 zu erwarten?
- 3.) Wie waren die Anteile im Jahr 2017?
- 4.) Die Produktion der Fahrzeuge mit Erdgasantrieb ist nur rentabel, wenn langfristig ein Anteil von ca. 30 % erreicht werden kann. Untersuchen Sie, ob dies bei gleichbleibendem Wechselverhalten zu erwarten ist.

## (2) Simplexalgorithmus: Lineare Optimierung

### Teil 1:

Einem Unternehmen stehen für die Produktion insgesamt 3 Erzeugnisse  $E_1$ ,  $E_2$  und  $E_3$  in einem bestimmten Zeitraum von jedem der Rohstoffe  $R_1$ ,  $R_2$  und  $R_3$  maximal 500 ME zur Verfügung.

Der Rohstoffverbrauch ist der nachfolgenden Tabelle zu entnehmen:

	$E_1$	$E_2$	$E_3$
$R_1$	2	1	2
$R_2$	3	0	1
$R_3$	0	2	3

Auf Grund von Absatzschwierigkeiten sollen vom Erzeugnis  $E_1$  höchstens 50 Stück produziert werden, während wegen vertraglicher Verpflichtungen von Erzeugnis  $E_3$  mindestens 150 Stück hergestellt werden müssen. Der Gewinn für die einzelnen Erzeugnisse beträgt je ME für  $E_1$  24 GE, für  $E_2$  18 GE, für  $E_3$  20 GE. Mit welchem Produktionsprogramm erzielt das Unternehmen einen maximalen Gewinn?

Lösen Sie mittels Simplexalgorithmus.

Bestimmen Sie die Lösung rechnerisch und graphisch.

Zur Kontrolle:  $(x_1 = 50 \text{ ME}, x_2 = 25 \text{ ME}, x_3 = 150 \text{ ME}, Z_{\max} = 4.650 \text{ GE})$

**Teil 2:** Dualproblem - Minimierung

$$\begin{array}{ll} (1) & x + 2y \geq 20 \\ (2) & 4x + 2y \geq 32 \\ (3) & 0,25x + 0,25y \geq 3,5 \\ (4) & 3x + 4y \geq 50 \\ \hline (ZF) & 12x + 9y \rightarrow \min. \end{array}$$

**(3) Differentialrechnung: Extrema ohne und mit Nebenbedingungen**

**Teil 1:**

**Extrema ohne Nebenbedingungen**

Ermitteln Sie die stationären Stellen der Funktion

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{3}y^3 - 4y^2 + \frac{1}{4}z \cdot e^{-z^2}$$

und untersuchen Sie diese Stellen auf ihre Extremwerteigenschaft und berechnen Sie die Extremwerte.

**Teil 2:**

**Optimum mit Nebenbedingungen**

Gegeben sei folgende Produktionsfunktion:

$$f(x, y) = 2x^{0,75} \cdot y^{0,25}$$

Die Mengeneinheit für x kostet 5,00 €, der Preis für eine Mengeneinheit von y liegt bei 2,00 €.

Insgesamt stehen uns 8.000,00 € zur Verfügung.

Wie viel kann man unter den gegebenen Bedingungen produzieren?

- Lösen Sie das Problem mittels Lagrangemethode.
- Welchen Wert besitzt der Lagrangeparameter im Maximumfall und welche ökonomische Aussage kann hier getroffen werden.

#### (4) Deskriptive Statistik I:

##### Häufigkeitsverteilung / Mittelwerte / Streumaße / Konzentrationsprozess

Im Frachthafen Mannheim werden im Laufe eines Monats mehrere Frachtschiffe beladen. Die Größe der Schiffe wird durch ihre Ladekapazität (in Tonnen) angegeben. Im Laufe des Monats Mai werden die in der Tabelle angegebenen Werte ermittelt, wobei eine Klasseneinteilung gewählt wird.

Nehmen Sie Gleichverteilung in den einzelnen Klassen an.

Gewicht (to)	absolute Häufig.	relative Häufig.	Klassenmitte	Klassenbreite	Häufigkeitsdichte	kum. rel. Häufig.
[0 ; 500[	30					
[500 ; 1.000[	60					
[1.000 ; 2.000[	70					
[2.000 ; 3.000[	30					
[3.000 ; 5.000[	10					
Summe						

- Vervollständigen Sie die Tabelle.
- Zeichnen Sie das zugehörige Histogramm.
- Bestimmen Sie den arithmetischen Mittelwert, die modale Klasse und den Modalwert.
- Bestimmen Sie den Median, das untere Quartil und das obere Quartil.
- Zeichnen Sie nun noch die Lorenzkurve und berechnen Sie den zugehörigen Ginikoeffizienten. Beurteilen Sie auch kurz Ihr Ergebnis.

#### (5) Deskriptive Statistik II: Korrelations- & Regressionsanalyse

Ein Mathematiklehrer möchte untersuchen, wie sich der Lernaufwand seiner Schüler auf die Punkte bei der Mathematikschularbeit auswirkt. Dabei erhebt er bei 13 Schülern folgende Daten (Lernaufwand in Stunden):

Lernaufwand	18	4	12	10	23	10	8	17	13	16	13	7	14
Punkte bei SA	29	5	19	21	26	28	16	19	14	30	18	3	11

- Zu welchem Schluss kommt er anhand der Daten?
- Welche Punktzahl ist zu erwarten bei einer Lernzeit von 15 Stunden?
- Wie lange muss man für 25 Punkte lernen?

#### (4) Deskriptive Statistik I:

##### Häufigkeitsverteilung / Mittelwerte / Streumaße / Konzentrationsprozess

Im Frachthafen Mannheim werden im Laufe eines Monats mehrere Frachtschiffe beladen. Die Größe der Schiffe wird durch ihre Ladekapazität (in Tonnen) angegeben. Im Laufe des Monats Mai werden die in der Tabelle angegebenen Werte ermittelt, wobei eine Klasseneinteilung gewählt wird.

Nehmen Sie Gleichverteilung in den einzelnen Klassen an.

Gewicht (to)	absolute Häufig.	relative Häufig.	Klassenmitte	Klassenbreite	Häufigkeitsdichte	kum. rel. Häufig.
[0 ; 500[	30					
[500 ; 1.000[	60					
[1.000 ; 2.000[	70					
[2.000 ; 3.000[	30					
[3.000 ; 5.000[	10					
Summe						

- Vervollständigen Sie die Tabelle.
- Zeichnen Sie das zugehörige Histogramm.
- Bestimmen Sie den arithmetischen Mittelwert, die modale Klasse und den Modalwert.
- Bestimmen Sie den Median, das untere Quartil und das obere Quartil.
- Zeichnen Sie nun noch die Lorenzkurve und berechnen Sie den zugehörigen Ginikoeffizienten. Beurteilen Sie auch kurz Ihr Ergebnis.

#### (5) Deskriptive Statistik II: Korrelations- & Regressionsanalyse

Ein Mathematiklehrer möchte untersuchen, wie sich der Lernaufwand seiner Schüler auf die Punkte bei der Mathematikschularbeit auswirkt. Dabei erhebt er bei 13 Schülern folgende Daten (Lernaufwand in Stunden):

Lernaufwand	18	4	12	10	23	10	8	17	13	16	13	7	14
Punkte bei SA	29	5	19	21	26	28	16	19	14	30	18	3	11

- Zu welchem Schluss kommt er anhand der Daten?
- Welche Punktzahl ist zu erwarten bei einer Lernzeit von 15 Stunden?
- Wie lange muss man für 25 Punkte lernen?