Klausur Wirtschaftsmathematik (22.06.2017)

Dozent: Jürgen Meisel

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Themengebiete:

Aufgabe 1:	Matrizen & Vektoren	25 Pkte
Aufgabe 2:	Differentialrechnung	25 Pkte
Aufgabe 3:	Lineare Optimierung	25 Pkte
Aufgabe 4:	Deskriptive Statistik	25 Pkte

<u>Punkteübersicht:</u>

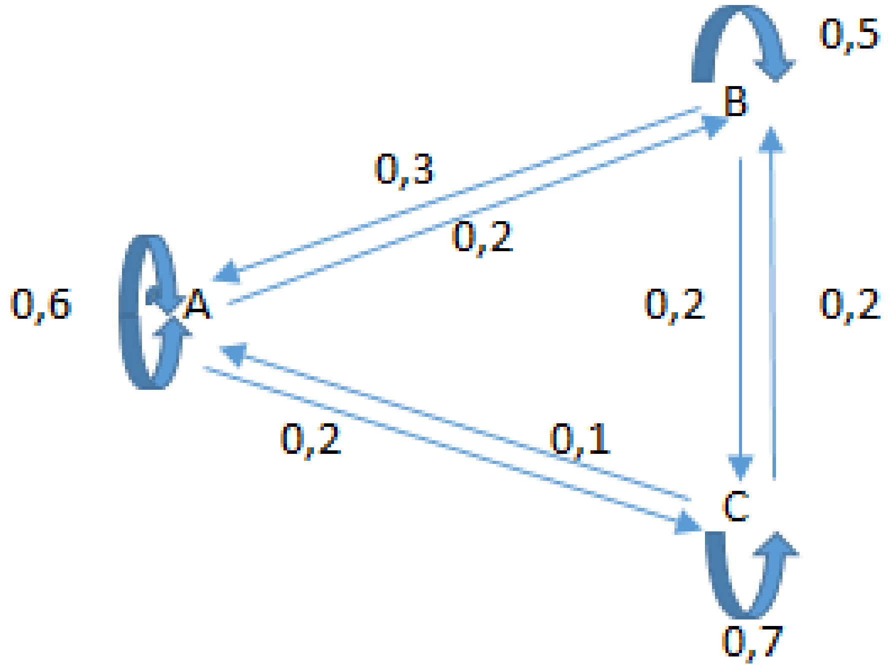
Aufgabe 1:		Aufgabe 3:	
Aufgabe 2:		Aufgabe 4:	

Gesamtpunktzahl: Note:

Klausur Wirtschaftsmathematik (22.06.2017)

(1) Matrizen und Vektoren: Übergangsmatrizen & Statisches Gleichgewicht

Ein Restaurant bietet täglich drei Menüs an. Jeden Tag gibt es Menü A mit Fleisch, Menü B mit Fisch und Menü C als vegetarische Variante.
Der Übergangsgraph gibt an, wie sich die Wahl der Kunden pro Tag verändert.



Am 20.06.2017 wählen 25% Menü A, 60% Menü B und 15% Menü C.

a) Wie sieht die Wahl am 21.06.2017 aus?

b) Das Restaurant möchte langfristig die Wahlgewohnheiten planen.
Ermitteln Sie hierfür das nötige Gleichgewicht.

c) Nach einer Woche wird in Deutschland ein Gammelfleischskandal aufgedeckt.
Zu diesem Zeitpunkt war die Verteilung wie folgt:
31,6% Menü A, 28,6% Menü B und Rest Menü C.
Daraufhin wird das **Fleischgericht** nur noch in 5% der Fälle wiedergewählt, 60% wechseln täglich zum Fisch und 35% täglich zum vegetarischen Gericht.
Die **Fischesser und Vegetarier** bleiben bei ihrer Wahl und wechseln überhaupt nicht mehr.
Bilden Sie aus diesen Angaben die neue Übergangsmatrix.

d) Wie viel Prozent der Kunden essen **zwei Tage** danach noch Fleisch und wie viele bestellen das vegetarische Gericht?

Lösungen:

$$U = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,5 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \qquad \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,60 \\ 0,15 \end{pmatrix}$$

21.08.2016: $\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,5 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,60 \\ 0,15 \end{pmatrix} \qquad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 0,345 \\ 0,38 \\ 0,275 \end{pmatrix}$

Langfristige Planung: $(U - E)\vec{x} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0,3143 \\ 0,2857 \\ 0,4 \end{pmatrix}$

Neue Übergangsmatrix: $U = \begin{pmatrix} 0,05 & 0 & 0 \\ 0,6 & 1 & 0 \\ 0,35 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{p}_{n1} = \begin{pmatrix} 0,316 \\ 0,286 \\ 0,398 \end{pmatrix}$

Zwei Tage später:

$$\vec{p}_{n3} = \begin{pmatrix} 0,05 & 0 & 0 \\ 0,6 & 1 & 0 \\ 0,35 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,05 & 0 & 0 \\ 0,6 & 1 & 0 \\ 0,35 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,316 \\ 0,286 \\ 0,398 \end{pmatrix} \qquad \vec{p}_{n3} = \begin{pmatrix} 0,00079 \\ 0,48508 \\ 0,51413 \end{pmatrix}$$

(2) Differentialrechnung: Extrema ohne und mit Nebenbedingungen

<u>**Teil 1:**</u> Gegeben sei folgende Funktion:

$$f(x,y,z) = 10-2x^2-\frac{1}{6}y^3-\frac{1}{2}z^2+8xy+2z$$

a) Zeigen Sie, dass zwei stationäre Stellen vorliegen.
b) Prüfen Sie die stationären Stellen auf Extremwerteigenschaft.

<u>**Lösungen:**</u>

$$f_x(x,y,z) = -4x+8y = 0 \rightarrow x = 2y$$

$$f_y(x,y,z) = -\frac{1}{2}y^2+8x = 0 \rightarrow -\frac{1}{2}y^2+16y = 0$$

$$\rightarrow y\left(-\frac{1}{2}y+16\right) = 0 \rightarrow y_1=0 \vee y_2=32$$

$$\rightarrow x_1=0 \vee x_2=64$$

$$f_z(x,y,z) = -z+2 = 0 \rightarrow z = 2$$

$$\Rightarrow S_1(0 \mid 0 \mid 2 \mid 12) \quad S_2\left(64 \,\middle|\, 32 \,\middle|\, 2 \,\middle|\, 2.742\frac{2}{3}\right)$$

$$Hesse-Matrix:$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 \\ 8 & -y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$H_{S_1}(f) = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} Det(H_1)=-4 \\ Det(H_2)=-64<0 \\ \Rightarrow indefinit \rightarrow SP \end{matrix}$$

$$H_{S_2}(f) = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 \\ 8 & -32 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} Det(H_1)=-4<0 \\ Det(H_2)=64>0 \\ Det(H_3)=-64<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} negativ\ definit \\ \rightarrow Maximum \end{cases}$$

Teil 2:

Bei einer Ein-Produktunternehmung liegt folgende Produktionsfunktion vor:

$$f(x,y) \quad = \quad 25 \cdot x^{0,4} \cdot y^{0,6}$$

wobei x und y die ME der beiden eingesetzten Produktionsfaktoren q_1 und q_2 darstellen. Die Faktorpreise für jeweils eine ME der beiden Produktionsfaktoren betragen q_1 = 12 GE und q_2 = 9 GE. Das Gesamtbudget beträgt 3.600,00 €.
Welchen Auftrag kann das Unternehmen möchte im Optimalfall unter Einhaltung der Budgetgrenze realisieren? Wie hoch ist das Produktionsergebnis?

Lösen Sie das Problem mittels Lagrangemethode und ermitteln Sie das Maximum.

Lösungen:

$$L(x,y,\lambda) \quad = \quad 25 \cdot x^{0,4} \cdot y^{0,6} + \lambda(3.600 - 12x - 9y)$$

$$L_x(x,y,\lambda) \quad = \quad 10 \cdot \frac{y^{0,6}}{x^{0,6}} - 12\lambda \quad = \quad 0 \quad \rightarrow \quad \lambda \quad = \quad \frac{5}{6} \cdot \frac{y^{0,6}}{x^{0,6}}$$

$$L_y(x,y,\lambda) \quad = \quad 15 \cdot \frac{x^{0,4}}{y^{0,4}} - 9\lambda \quad = \quad 0 \quad \rightarrow \quad \lambda \quad = \quad \frac{5}{3} \cdot \frac{x^{0,4}}{y^{0,4}}$$

$$\mathit{Austauschverhältnis:} \quad y \quad = \quad 2x$$

$$\xrightarrow{\textit{mittels NB}} \quad x = 120 \quad \textit{und} \quad y = 240$$

$$\textit{und} \quad f(120/240) = 4.547,15$$

(3) Simplexalgorithmus: Lineare Optimierung

Ein Betrieb stellt auf drei Maschinen verschiedene Produkte her. Die Bearbeitungszeiten in Minuten für die Produkte A und B und deren Verkaufspreise sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

	Produkt A	Produkt B	Kapazität in Minuten
Maschine 1	4	5	600
Maschine 2	5	3	420
Maschine 3	3	5	412

Verkaufspreis Produkt A: 400,00 € Verkaufspreis Produkt B: 600,00 €

Gesucht ist das umsatzmaximierende Produktionsprogramm.

a) Bestimmen Sie graphisch das Erlösmaximum.

<u>Lösungen:</u>

b) Lösen Sie das Optimierungsproblem mithilfe des Simplexverfahrens und erläutern Sie kurz Ihre Lösung.

Lösungen:

	x	y	u_1	u_2	u_3	b
i	4	5	1	0	0	600
ii	5	3	0	1	0	420
iii	3	5	0	0	1	412
ZF	400	600	0	0	0	G

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}\cdot iii}$$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b
i	4	6	1	0	0	600
ii	5	3	0	1	0	420
iii	0,6	1	0	0	0,2	82,4
ZF	400	600	0	0	0	G

$$\xrightarrow[Z-600\cdot iii]{\substack{i-5\cdot iii\\ ii-3\cdot iii}}$$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b
i	1	0	1	0	-1	188
ii	3,2	0	0	1	$-0,6$	172,8
iii	0,6	1	0	0	0,2	82,4
ZF	40	0	0	0	-120	$G-49.440$

$$\xrightarrow{\frac{5}{16}\cdot ii}$$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b
i	1	0	1	0	-1	188
ii	1	0	0	$\frac{5}{16}$	$-\frac{3}{16}$	54
iii	0,6	1	0	0	0,2	82,4
ZF	40	0	0	0	-120	$G-49.440$

$$\xrightarrow[Z-40\cdot ii]{\substack{i-ii\\ iii-0,6\cdot ii}}$$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b
i	0	0	1	$-\frac{5}{16}$	$-\frac{13}{16}$	134
ii	1	0	0	$\frac{5}{16}$	$-\frac{3}{16}$	54
iii	0	1	0	$-\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	50
ZF	0	0	0	$-12,5$	$-112,5$	$G-51.600$

$$Lösung: \begin{pmatrix} x \\ y \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 \\ 50 \\ 134 \end{pmatrix} \quad mit \quad Gesamtgewinn: 51.600$$

(4) Deskriptive Statistik:
Häufigkeitsverteilung / Mittelwerte / Streumaße

Das monatliche Gehalt von insgesamt 200 Beschäftigten des Unternehmens TMT17 wird untersucht. Die Gehaltsbuchhaltung liefert die in der Tabelle angegebenen Werte in der vorgegebenen Klasseneinteilung.
Nehmen Sie Gleichverteilung in den einzelnen Klassen an.

Gehalt (in €)	absolute Häufig.	relative Häufig.	Klassen-mitte	Klassen-breite	Häufig-keitsdichte	kum. rel. Häufig.
[0 ; 800[	32					
[800 ; 1.000[	44					
[1.000 ; 1.200[	60					
[1.200 ; 1.400[	20					
[1.400 ; 2.000[	24					
[2.000 ; 3.000]	20					
Summe						

a) Vervollständigen Sie die Tabelle.
b) Bestimmen Sie den arithmetischen Mittelwert, die Standardabweichung, die modale Klasse und den Modalwert.
c) Bestimmen Sie den Median, das untere Quartil und das obere Quartil.
d) Zeichnen Sie den zugehörigen Boxplot
e) Zeichnen Sie das zugehörige Histogramm.

Lösungen:

Gehalt (in €)	absolute Häufig.	relative Häufig.	Klassen-mitte	Klassen-breite	Häufig-keitsdichte	kum. rel. Häufig.
[0 ; 800[	32	0,16	400	800	0,04	0,16
[800 ; 1.000[	44	0,22	900	200	0,22	0,38
[1.000 ; 1.200[	60	0,3	1.100	200	0,3	0,68
[1.200 ; 1.400[	20	0,1	1.300	200	0,1	0,78
[1.400 ; 2.000[	24	0,12	1.700	600	0,04	0,9
[2.000 ; 3.000]	20	0,1	2.500	1.000	0,02	1,0
Summe	200	1,0	---	---	---	---

arithmetischer Mittelwert: $\bar{x} = 1.176,0$

Standardabweichung: $\sigma = 569,76$

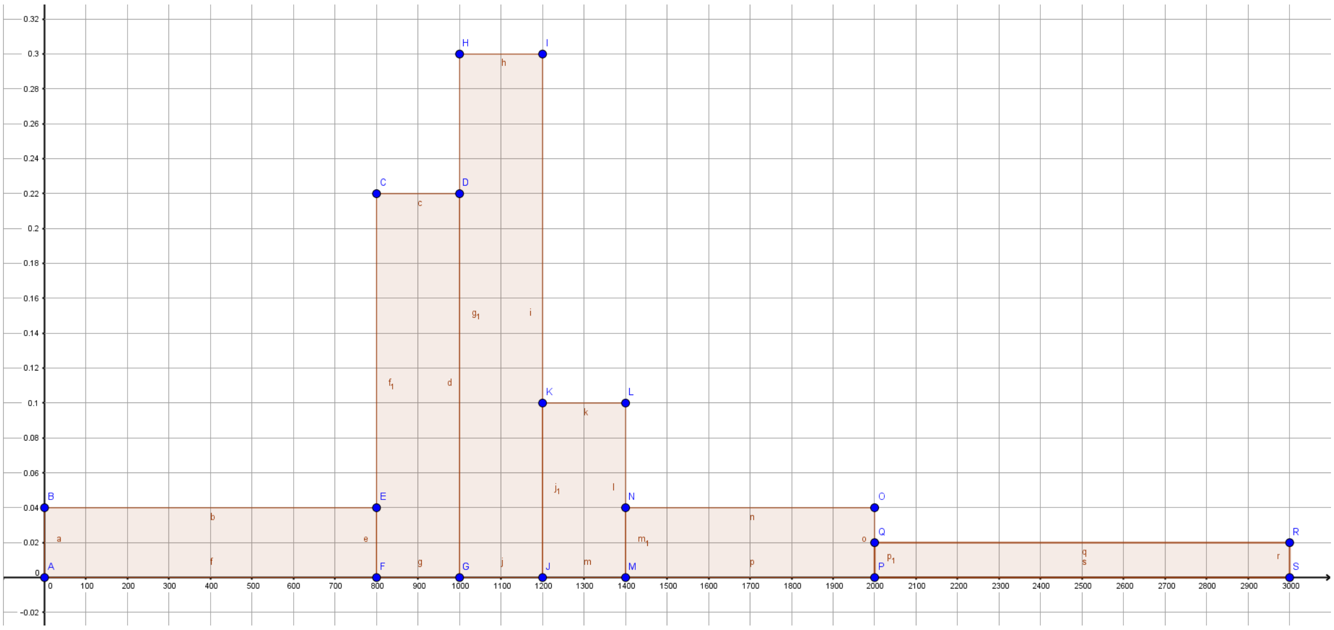
modale Klasse [1.000 ; 1.200[wegen HD_{max} => $x_{Mod} = 1.100$

$$\overline{x_M} = 1.000 + \frac{200 \cdot (0,5 - 0,38)}{0,3} = 1.080$$

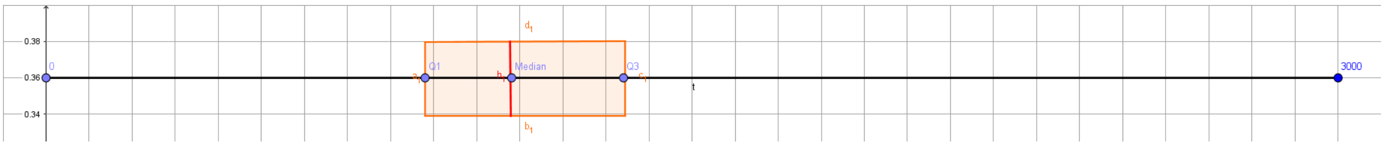
$$\overline{q_1} = 800 + \frac{200 \cdot (0,25 - 0,16)}{0,22} = 881,8$$

$$\overline{q_3} = 1.200 + \frac{200 \cdot (0,75 - 0,68)}{0,1} = 1.340$$

Histogramm:



Boxplot:



Notation zur beschreibenden Statistik

Merkmale (diskret oder intervallskaliert): X, Y, ...

Merkmalsausprägungen: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$

geordnete Merkmalsausprägungen: $x_{(1)}, x_{(2)}, x_{(3)}, \ldots, x_{(N)}$

Anzahl der Merkmalsträger: N

Anzahl der Klassen (Intervalle) bzw. Anzahl der Merkmalsausprägungen: k

absolute Häufigkeiten: $N_i = N(X = x_i)$

relative Häufigkeiten: $p_i = p(X = x_i) = N_i / N = N(X = x_i) / N$

Prozentanteile: $p_i \cdot 100\,\%$

Klassenmitten: $c_i = (\text{Intervalluntergrenze} + \text{Intervallobergrenze}) / 2$

Klassenbreiten: $\Delta_i = \text{Intervallobergrenze} - \text{Intervalluntergrenze}$

Histogrammhöhen: $h_i = \frac{p_i \cdot 100\,\%}{\Delta_i}$ bei Normierung auf 100 %

kumulierte relative Häufigkeit an der Stelle a: F(a)

Mittelwerte

arithmetischer Mittelwert (bei diskretem Merkmal): $\overline{X} = \sum_{i=1}^{k} p_i \cdot x_i = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{k} N_i \cdot x_i$

arithmetischer Mittelwert (bei intervallskaliertem Merkmal): $\overline{X} = \sum_{i=1}^{k} p_i \cdot c_i = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{k} N_i \cdot c_i$

harmonischer Mittelwert: $\overline{X}_{harm} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{k} \frac{N_i}{x_i}}$

geometrischer Mittelwert: $\overline{X}_{geo} = \sqrt[N]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_N}$

Modalwert (bei diskretem Merkmal): $\overline{X}_{mod} = x_i$ mit größtem N_i

modale Klasse (bei intervallskaliertem Merkmal): Klasse mit größtem h_i

Modalwert (bei intervallskaliertem Merkmal): $\overline{X}_{mod} = c_i$ der modalen Klasse

Median (bei diskretem Merkmal): $\overline{X}_{0,5} = x_{\left(\frac{N+1}{2}\right)}$ falls N ungerade, $\overline{X}_{0,5} = \frac{x_{\left(\frac{N}{2}\right)} + x_{\left(\frac{N}{2}+1\right)}}{2}$ falls N gerade

Median (bei intervallskaliertem Merkmal): $\overline{X}_{0,5} \in [a;b]$, $\overline{X}_{0,5} = a + \frac{\Delta_i \cdot (0{,}5 - F(a))}{p_i}$

unteres Quartil (bei intervallskaliertem Merkmal): $\overline{X}_{0,25} \in [a;b]$, $\overline{X}_{0,25} = a + \frac{\Delta_i \cdot (0{,}25 - F(a))}{p_i}$

oberes Quartil (bei intervallskaliertem Merkmal): $\overline{X}_{0,75} \in [a;b]$, $\overline{X}_{0,75} = a + \frac{\Delta_i \cdot (0{,}75 - F(a))}{p_i}$

Streuungsmaße

Varianz: $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} p_i \cdot (x_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{k} N_i \cdot (x_i - \overline{X})^2 = \overline{X^2} - (\overline{X})^2$

arithmetischer Mittelwert des quadrierten Merkmals: $\overline{X^2} = \sum_{i=1}^{k} p_i \cdot x_i^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{k} N_i \cdot x_i^2$