Klausur Wirtschaftsmathematik

Fakultät für Technik **Studiengang**: Mechatronik Datum: 19.06.2019

(1) Matrizen und Vektoren: Übergangsmatrizen & Statisches Gleichgewicht

Der Markt von Tablet-PCs wird im Wesentlichen von drei Herstellern A, S und M beherrscht. Nach einem Jahr bleiben 65% der Kunden von A dem Hersteller treu,15% der Kunden wechseln zum Hersteller M und 20% wechseln zum Hersteller S.
Dem Hersteller M bleiben 50% treu, 30% wechseln zum Hersteller A und 20% wechseln zum Hersteller S. Dagegen bleiben 40% dem Hersteller S treu, 20% wechseln zu M und 40% wechseln zum Hersteller A.

Im Jahr 2018 konnte man folgendes Verteilungsverhältnis feststellen:

A: S : M entspricht 2 : 3 : 5

a) Erstellen Sie die Übergangsmatrix.
b) Welche Anteile sind 2019 zu erwarten?
c) Können mit diesen Daten die Anteile im Jahr 2017 berechnet werden?
d) Der Hersteller A kann nur am Markt rentabel existieren, wenn langfristig ein Anteil von ca. 45 % erreicht werden kann. Untersuchen Sie, ob dies bei gleichbleibendem Wechselverhalten zu erwarten ist.

Lösung:

a)

	A	S	M
A	$0,65$	$0,40$	$0,30$
S	$0,20$	$0,40$	$0,20$
M	$0,15$	$0,20$	$0,50$

$$\rightarrow \quad U = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,40 & 0,30 \\ 0,20 & 0,40 & 0,20 \\ 0,15 & 0,20 & 0,50 \end{pmatrix} \qquad p_{2018} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,3 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

b) $$U \cdot p_{2018} = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,40 & 0,30 \\ 0,20 & 0,40 & 0,20 \\ 0,15 & 0,20 & 0,50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,3 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,40 \\ 0,26 \\ 0,34 \end{pmatrix}$$

c) Ansatz:

$$U \cdot p_{2017} = p_{2018} \rightarrow \begin{pmatrix} 0,65 & 0,40 & 0,30 \\ 0,20 & 0,40 & 0,20 \\ 0,15 & 0,20 & 0,50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,3 \\ 0,5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Lösung LGS:}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/7 \\ 1/2 \\ 13/14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,429 \\ 0,500 \\ 0,929 \end{pmatrix}$$

d) Ansatz:

$$U \cdot \vec{x} = \vec{x} \rightarrow \begin{pmatrix} 0,65 & 0,40 & 0,30 \\ 0,20 & 0,40 & 0,20 \\ 0,15 & 0,20 & 0,50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\text{Lösung LGS}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ z \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{x+y+z=1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,50 \\ 0,25 \\ 0,25 \end{pmatrix}$$

Mit 50 % wird die 45%-Marke deutlich überschritten.

(2) Simplexalgorithmus: Lineare Optimierung

Teil 1:

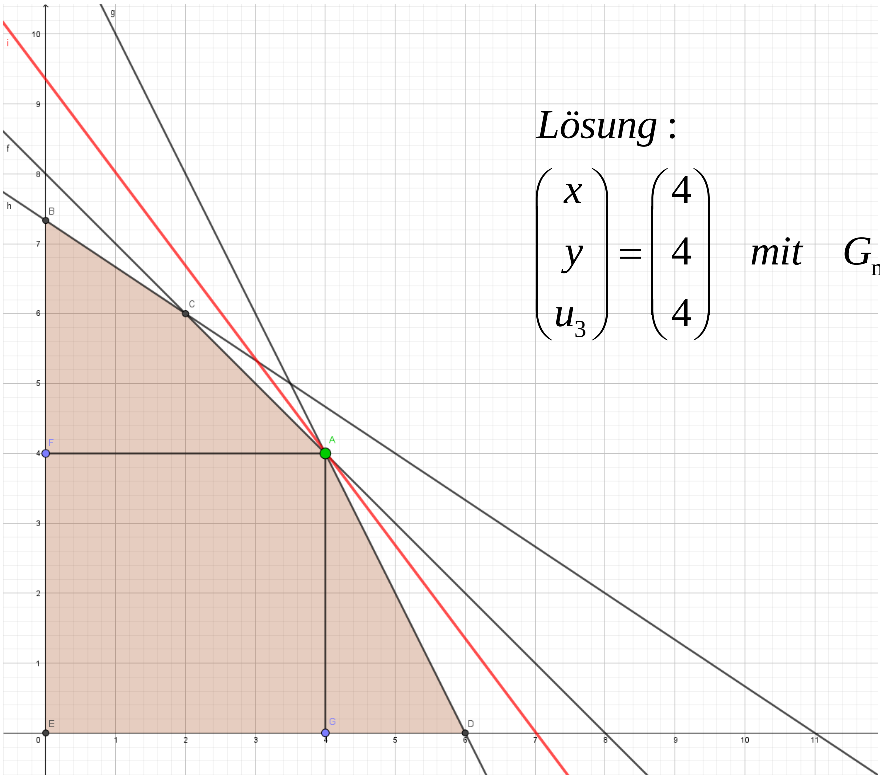
$$\begin{array}{lrcl}
(1) & 2x+2y & \leq & 16 \\
(2) & 4x+2y & \leq & 24 \\
(3) & 4x+6y & \leq & 44 \\
\hline
ZF & f(x,y) & = & 80x+60y \rightarrow \max.
\end{array}$$

Teil 2:

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & 2x+y & \geq & 12 \\
(2) & x+2y & \geq & 12 \\
(3) & x+y & \geq & 10 \\
(4) & 3x+4y & \geq & 40 \\
\hline
ZF & f(x,y) & = & 11x+8y \rightarrow \min.
\end{array}$$

Erstellen Sie für die Aufgaben in Teil 1 und Teil 2 jeweils die graphische und die analytische Lösung.

Lösung: Teil 1



$$\text{Lösung}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad mit \quad G_{\max} = 560$$

Lösung Simplexalgorithmus:

Ursprüngliches lineares Ungleichungssystem => Lösungstableau

$$\begin{array}{rcrcl}
80x_1 & + & 60x_2 & != & max \\
2x_1 & + & 2x_2 & \leq & 16 \\
4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 24 \\
4x_1 & + & 6x_2 & \leq & 44 \\
 & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

-80	-60	0	0	0	
1	2	3	4	5	
0	1	1	-0.5	0	4
1	0	-0.5	0.5	0	4
0	0	-4	1	1	4
0	0	-20	-10	0	-560

Rechenschritte:

		-80	-60	0	0	0		
		1	2	3	4	5		
0	3	2	2	1	0	0	16	8
0	4	4	2	0	1	0	24	6
0	5	4	6	0	0	1	44	11
		80	60	0	0	0	0	

Spalte 1 geht in die Basis. Spalte 4 verlässt die Basis.

		-80	-60	0	0	0		
		1	2	3	4	5		
0	3	0	1	1	-0.5	0	4	4
-80	1	1	0.5	0	0.25	0	6	12
0	5	0	4	0	-1	1	20	5
		0	20	0	-20	0	-480	

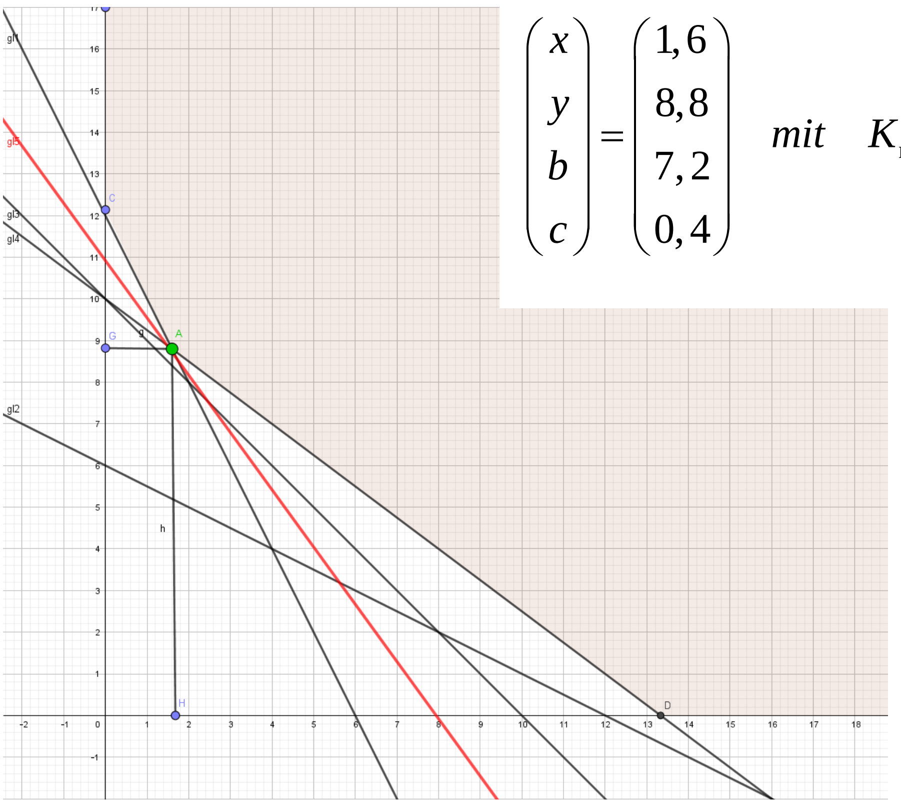
Spalte 2 geht in die Basis. Spalte 3 verlässt die Basis.

Quelle: http://www.simplexme.com

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	
I	2	2	1	0	0	16	$\frac{1}{4}$ II
II	4	2	0	1	0	24	=>
III	4	6	0	0	1	44	
ZF	80	60	0	0	0	G	
I	2	2	1	0	0	16	I − 2 II
II	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	6	=>
III	4	6	0	0	1	44	III − 4 II
ZF	80	60	0	0	0	G	ZF − 80 II
I	0	1	1	$-\frac{1}{2}$	0	4	
II	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	6	II − $\frac{1}{2}$ I =>
III	0	4	0	−1	1	20	III − 4 I
ZF	0	20	0	−20	0	G − 480	ZF − 20 I
I	0	1	1	$-\frac{1}{2}$	0	4	
II	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	4	
III	0	0	−4	1	1	4	
ZF	0	0	−20	−10	0	G − 560	

$$\mathbb{L}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ mit } G_{max} = 560$$

Lösung: Teil 2



Lösung :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,6 \\ 8,8 \\ 7,2 \\ 0,4 \end{pmatrix} \quad mit \quad K_{\min} = 88$$

Lösung Simplexalgorithmus mit Dualproblem (Invertierung der Ausgangs-Matrix)

Primar $\Rightarrow$ MIN

$2x + y \geq 12$

$x + 2y \geq 12 \rightarrow 19{,}2$

$x + y \geq 10 \rightarrow 10{,}4$

$3x + 4y \geq 40$

Zf: $11x + 8y \rightarrow \min$

17,6
70,4
88,0

Dual $\Rightarrow$ MAX

	BV	a	b	c	d	u_1	u_2	b	
I	u_1	2	1	1	3	1	0	11	$\frac{1}{4}$ II $\Rightarrow$
II	u_2	1	2	1	4	0	1	8	
		12	12	10	40	0	0	z	
I	u_1	2	1	1	3	1	0	11	I − 3II $\Rightarrow$
II	d	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	2	
		12	12	10	40	0	0	z	z − 40 II
I	u_1	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	1	$-\frac{3}{4}$	5	I · $\frac{4}{5}$ $\Rightarrow$
II	d	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	2	
		2	−8	0	0	0	−10	z − 80	
I	a	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$	4	II − $\frac{1}{4}$ I $\Rightarrow$
II	d	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	2	
		2	−8	0	0	0	−10	z − 80	z − 2I
I	a	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$	4	
II	d	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	$\Rightarrow$
		0	$\boxed{-7{,}2}$	$\boxed{-\frac{2}{5}}$	0	$\boxed{-\frac{8}{5}}$	$\boxed{-8{,}8}$	$\boxed{z-88}$	

Schlupf

Variablen

(3) Differentialrechnung: Extrema ohne und mit Nebenbedingungen

Teil 1: **Extrema ohne Nebenbedingungen**

Ermitteln Sie die stationären Stellen der Funktion $f(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{9}{y} + x - y$ und untersuchen Sie diese Stellen auf ihre Extremwerteigenschaft und berechnen Sie die Extremwerte.

Warum ist der Funktionswert des Maximums kleiner als der Funktionswert des Minimums?

Lösung:

$$f_x(x,y) = -\frac{1}{x^2}+1 = 0 \rightarrow |x|=1 \qquad f_y(x,y) = \frac{9}{y^2}-1 = 0 \rightarrow |y|=3$$

$$S_1(1 \quad 3 \quad f_1) \quad S_2(-1 \quad 3 \quad f_2) \quad S_3(1 \quad -3 \quad f_3) \quad und \quad S_4(-1 \quad -3 \quad f_4)$$

$$Hesse-Matrix: \quad H(f) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & 0 \\ 0 & -\frac{18}{y^3} \end{pmatrix}$$

$$H_{S_1}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{Auswertung} \det(H_1) = 2 \vee \det(H_2) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = -\frac{4}{3} \quad indefinit \quad \Rightarrow \quad SP$$

$$H_{S_2}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{Auswertung} \det(H_1) = -2 \vee \det(H_2) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{4}{3} \quad neg.\,definit \Rightarrow Max(-1 \quad 3 \quad -8)$$

$$H_{S_3}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{Auswertung} \det(H_1) = 2 \vee \det(H_2) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{4}{3} \quad pos.\,definit \Rightarrow Min(1 \quad -3 \quad 8)$$

$$H_{S_4}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{Auswertung} \det(H_1) = -2 \vee \det(H_2) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = -\frac{4}{3} \quad indefinit \quad \Rightarrow \quad SP$$

Es handelt sich um eine gebrochen-rationale Funktion mit Unterteilung in Sektoren aufgrund der Polstellen; daher ist der Funktionswert des Maximums kleiner als der Funktionswert des Minimums.

Teil 2: **Extrema ohne Nebenbedingungen**

Ermitteln Sie die stationären Stellen der Funktion $f(x,y) = x \cdot y \cdot e^{-x^2-y^2}$

Eine Untersuchung dieser Stellen auf ihre Extremwerteigenschaft muss nicht erfolgen!

Lösung:

$$f_x(x,y) \;=\; y\cdot e^{-x^2-y^2}+(-2x)\cdot x\cdot y\cdot e^{-x^2-y^2} \;=\; e^{-x^2-y^2}y\left(1-2x^2\right) \;=\; 0$$

$$\rightarrow\quad |x|=\sqrt{0,5}\quad und\quad y=0$$

$$f_y(x,y) \;=\; x\cdot e^{-x^2-y^2}+(-2y)\cdot x\cdot y\cdot e^{-x^2-y^2} \;=\; e^{-x^2-y^2}x\left(1-2y^2\right) \;=\; 0$$

$$\rightarrow\quad |y|=\sqrt{0,5}\quad und\quad x=0$$

$$S_{1-4}\left(\pm\sqrt{0,5}\quad \pm\sqrt{0,5}\quad f_{1-4}\right)\quad und\quad S_5\left(0\quad 0\quad f_5\right)$$

Teil 3: **Optimum mit Nebenbedingungen**

Gegeben sei folgende Produktionsfunktion: $f(x,y) \;=\; 2x^{0,6}\cdot y^{0,4}$

Die Mengeneinheit für x kostet 8,00 €, der Preis für eine Mengeneinheit von y liegt bei 6,50 €. Insgesamt stehen uns 16.250,00 € zur Verfügung.
Wie viel kann man unter den gegebenen Bedingungen produzieren?

a) Lösen Sie das Problem mittels Lagrangemethode.
b) Welchen Wert besitzt der Lagrangeparameter im Maximumfall und welche ökonomische Aussage kann hier getroffen werden.

Lösung:

$$L(x,y,\lambda) \;=\; 2\cdot x^{0,6}\cdot y^{0,4}+\lambda\left(16.250-8x-6,5y\right)$$

$$L_x(x,y,\lambda) \;=\; 1,2\cdot\frac{y^{0,4}}{x^{0,4}}-8\lambda \;=\; 0 \;\rightarrow\; \lambda \;=\; \frac{1,2}{8}\cdot\frac{y^{0,4}}{x^{0,4}}$$

$$L_y(x,y,\lambda) \;=\; 0,8\cdot\frac{x^{0,6}}{y^{0,6}}-6,5\lambda \;=\; 0 \;\rightarrow\; \lambda \;=\; \frac{0,8}{6,5}\cdot\frac{x^{0,6}}{y^{0,6}}$$

$$Austauschverhältnis:\quad 1,21875y \;=\; x$$

$$\xrightarrow{in\ NB}\quad 16.250 \;=\; 8\cdot 1,21875y+6,5y \;=\; 16,25y$$

$$\xrightarrow{mittels\ NB}\quad y \;=\; 1.000\quad und\quad x \;=\; 1.218,75$$

$$und\quad f\left(1.218,75/1.000\right) \;=\; 2.252,05$$

$$\lambda \;=\; \frac{0,8}{6,5}\cdot 1,21875^{0,6} \;=\; 0,1386$$

Das bedeutet eine Erhöhung des Budgets um 1 GE führt zu einer Erhöhung des Outputs von 0,1386 ME.

(4) Regression & Korrelation

Zwischen dem Hopfenpreis in € je Handelseinheit und dem Bierpreis in Cent je Liter bestehe folgender Zusammenhang:

Hopfenpreis	**6**	**8**	**5**	**7**	**4**
Bierpreis	**120**	**150**	**125**	**145**	**110**

a) Bestimmen Sie die lineare Regressionsfunktion für den Bierpreis bei gegebenem Hopfenpreis.
b) Welcher Bierpreis ist bei einem Hopfenpreis von 6,50 zu erwarten?
c) Welcher Hopfenpreis muss bei einem Bierpreis von 250 vorgelegen haben?
d) Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizient nach Brevais-Pearson?
e) Das Unternehmen möchte nach China expandieren:

Wie würden sich die Werte der Regressionsgeraden und des Korrelationskoeffizienten ändern, wenn man nun auf Basis der chinesischen Währung rechnete?
⇨ *Wechselkurs: 0,15 € entspricht 1,00 Yuan Renminbi*

Lösung:

Lineare Regression $f(x) \quad = \quad 10x+70$

$$f(6{,}5)=10\cdot 6{,}5+70 \quad = \quad 135 \qquad und \qquad 250=10\cdot x+70 \quad \rightarrow \quad x=18$$

Korrelationskoeffizient: r = 0,9325 (= starke positive Korrelation)

Die Expansion nach China würde den Korrelationskoeffizienten nicht verändern.
Die Werte der Regressionsgeraden müssten allerdings dem Währungskurs angepasst werden.

$$f(x)=10x+70$$

$$\xrightarrow[\frac{70[ct]}{15}]{\frac{10[ct]}{15}} \quad f_{China}\left(x[in\,€]\right)=\frac{2}{3}x+\frac{14}{3} \quad oder \quad f_{China}\left(x[in\,Y]\right)=0{,}1x+\frac{14}{3}$$

(5) Mittelwerte und Streumaße - klassiert

Bei der letzten Mathematikklausur wurden folgende Ergebnisse festgestellt:

Punkte:	$0 \le x < 20$	$20 \le x < 35$	$35 \le x < 50$	$50 \le x < 75$	$75 \le x \le 100$
Anzahl Studenten	**2**	**10**	**14**	**36**	**18**

a) Zeichnen Sie das zugehörige Histogramm

b) Bestimmen Sie den Modus.

c) Wie hoch ist die Durchschnittspunktzahl und wie groß ist die Standardabweichung?

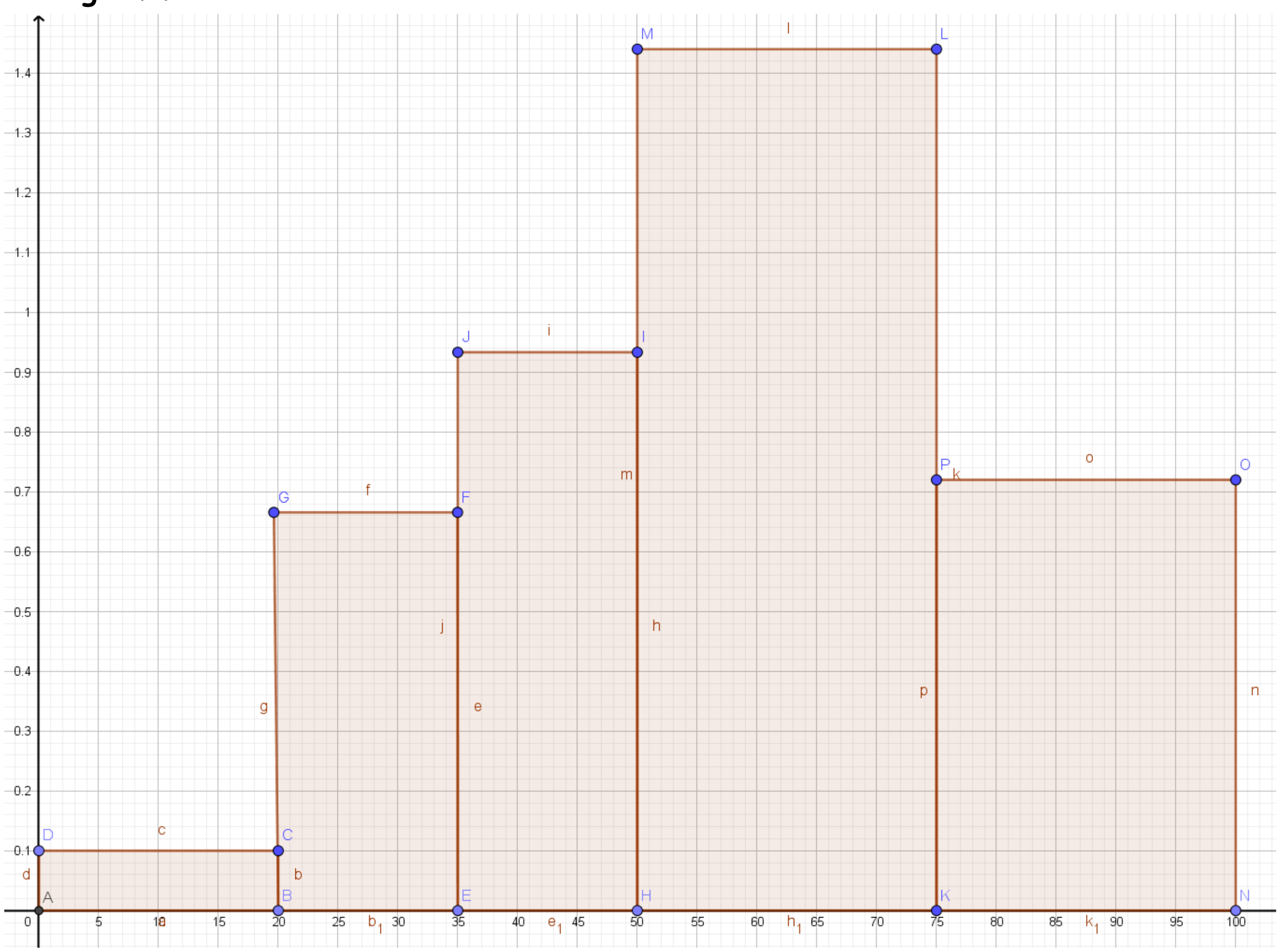
d) Wie hoch sind der Median und beiden Quartile?

Lösung:

Punkte:	$0 \le x < 20$	$20 \le x < 35$	$35 \le x < 50$	$50 \le x \le 75$	$75 \le x \le 100$
Anzahl Studenten	**2**	**10**	**14**	**36**	**18**
Relative Häufigkeit	$\frac{1}{40} = 0,025$	$\frac{1}{8} = 0,125$	$\frac{7}{40} = 0,175$	$\frac{9}{20} = 0,450$	$\frac{9}{40} = 0,225$
Summierte rel. H	**0,025**	**0,150**	**0,325**	**0,775**	**1,000**
Klassenbreite	**20**	**15**	**15**	**25**	**25**
HDI	$\frac{2}{20} = 0,1$	$\frac{10}{15} = 0,667$	$\frac{14}{15} = 0,933$	$\frac{36}{25} = 1,440$	$\frac{18}{25} = 0,720$
Klassenmitte	**10**	**27,5**	**42,5**	**62,5**	**87,5**

e)

Histogramm:



Modus: Modale Klasse (größte HDI): => [50;75[=> Modus (Klassenmitte): 62,5

Arithmetisches Mittel und Standardabweichung

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow \mu = 58,9375 \qquad \sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - \mu^2} \Rightarrow \sigma = 20,493$$

Anmerkung: Verwendung der Klassenmitten.

Median und Quartile

$$\overline{x_M} = a + \frac{\Delta_i \cdot (0,5 - F(a))}{p_i} \rightarrow \overline{x_M} = 50 + \frac{25 \cdot (0,5 - 0,325)}{0,450} = 59,72$$

$$\overline{x_{0,25}} = a + \frac{\Delta_i \cdot (0,25 - F(a))}{p_i} \rightarrow \overline{x_{0,25}} = 35 + \frac{15 \cdot (0,25 - 0,150)}{0,175} = 43,57$$

$$\overline{x_{0,75}} = a + \frac{\Delta_i \cdot (0,75 - F(a))}{p_i} \rightarrow \overline{x_{0,75}} = 50 + \frac{25 \cdot (0,75 - 0,325)}{0,450} = 73,61$$

(6) Ginikoeffizient und Lorenzkurve

Die 20 bestplatzierten Tennisspieler der ATP-Weltrangliste haben im April 10 Mio. € erhalten. Hinsichtlich der Lorenzkurve (LK), welche die Preisgeldkonzentration dar-stellt, sind aber leider nur die Steigungen in drei der vier Klassen bekannt.

Klasse	Anzahl Spieler	Summe Spieler	Gewinn je Spieler	Summe Gewinn	Steigung LK
1	8				0,25
2	4				1,00
3					1,50
4	4				
Summe		---	---	---	---

Vervollständigen Sie die Tabelle mit den insgesamt vier Gruppen von Tennisspielern, Zeichnen Sie die zugehörige Lorenzkurve und berechnen Sie den Ginikoeffizient.

Lösung:

Klasse	Anzahl Spieler	Summe Spieler	Gewinn je Spieler	Summe Gewinn	Steigung LK
1	8	8	125.000	1.000.000	0,25
2	4	12	500.000	3.000.000	1,00
3	4	16	750.000	6.000.000	1,50
4	4	20	1.000.000	10.000.000	2,00
Summe	20	---	---	---	---

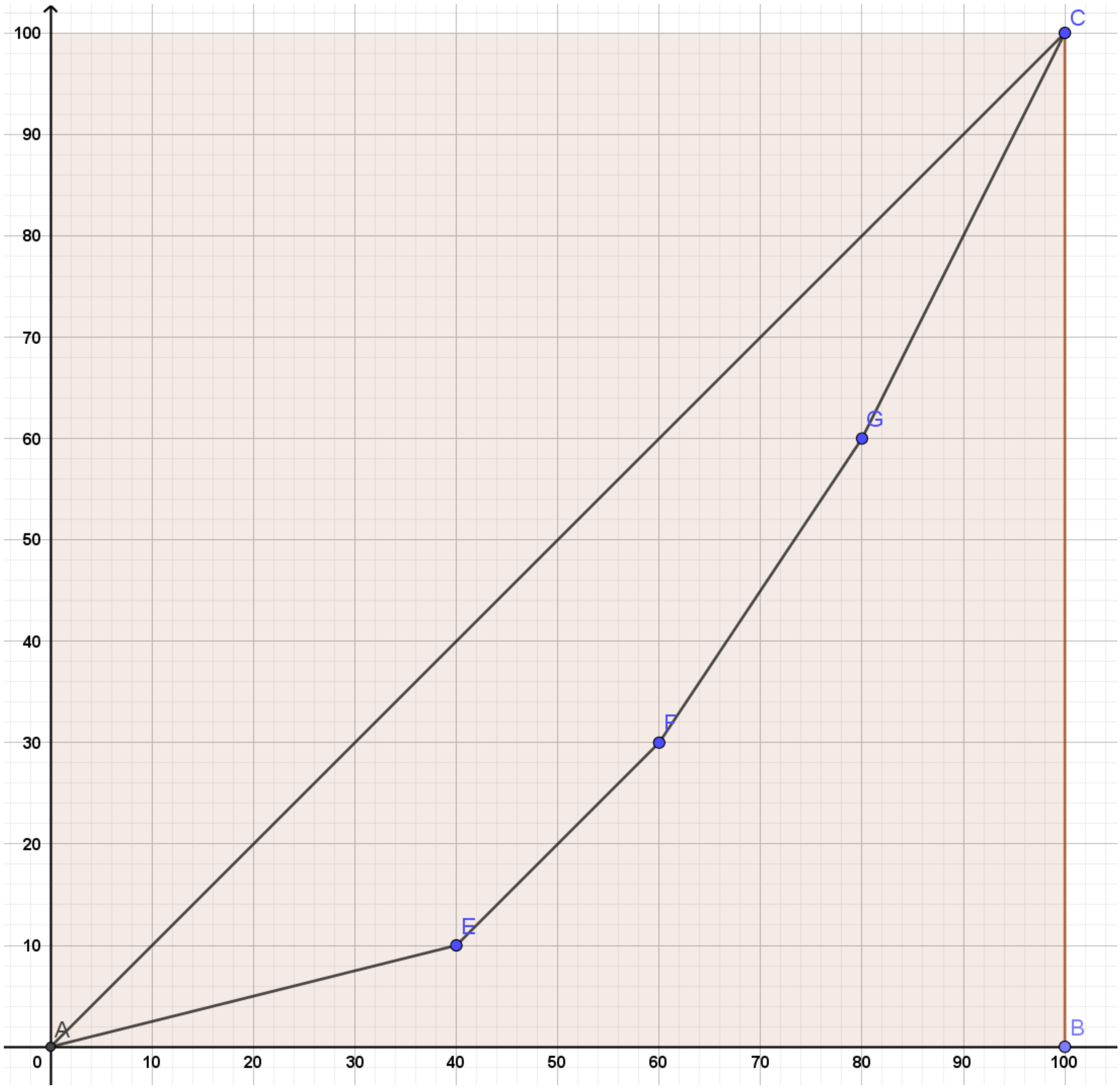
Gini-Koeffizient: *Berechung der Flächen mit relativen kumulierten Häufigkeiten*

$$Gini = \frac{\text{Konzentrationsfläche K}}{\text{maximale Konzentrationsfläche }\mathrm{K}_{\max}}$$

Klasse	Anzahl Spieler	Summe Spieler	%-Wert	Gewinn je Klasse	Summe Gewinn	%-Wert	Steigung LK
1	8	8	40	1.000.000	1.000.000	10	$\frac{10}{40} = 0,25$
2	4	12	60	2.000.000	3.000.000	30	$\frac{20}{20} = 1,00$
3	4	16	80	3.000.000	6.000.000	60	$\frac{30}{20} = 1,50$
4	4	20	100	4.000.000	10.000.000	100	$\frac{40}{20} = 2,00$
Summe	20	---	---		---		---

Die Lorenzkurve ist hier mit absoluten Werten dargestellt.

Die Lorenzkurve ist hier mit prozentualen Werten dargestellt.



Fläche unter Lorenzkurve:

$$A_1 = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 1 = 4 \qquad A_2 = \frac{1}{2}\cdot(1+3)\cdot 4 = 8$$

$$A_3 = \frac{1}{2}\cdot(3+6)\cdot 4 = 18 \qquad A_4 = \frac{1}{2}\cdot(6+10)\cdot 4 = 32$$

$$\left.\right\} A_{ges} = 62$$

Fläche unter Gleichverteilungskurve: $A = \frac{1}{2}\cdot 20\cdot 10 = 100$

$$GK = \frac{100-62}{100} = 0{,}38$$

Formelsammlung Statistik

Lageparameter und Streumaße:

Teil 1: Diskrete Merkmalsdarstellung (Einzelwerte)

Einfaches arithmetisches Mittel: $\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \left[oder \qquad \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \right]$

Gewogenes arithmetisches Mittel: $\mu = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i \cdot n_i)}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i \cdot n_i) = \sum_{i=1}^{k}\left(x_i \cdot \frac{n_i}{n}\right)$

Varianz: $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - \mu^2$

Varianz bei Häufigkeitsverteilung: $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \mu)^2 \cdot n_i$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

Median (Zentralwert): $\overline{x_M} = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & \text{für n ungerade} \\ \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right) & \text{für n gerade} \end{cases}$

Quantile/Quartile: $\overline{x_p} = \begin{cases} x_{[n\cdot p]+1} & \text{für } (\mathrm{n}\cdot\mathrm{p}) \text{ nicht ganzzahlig} \\ \frac{1}{2}\left(x_{n\cdot p} + x_{n\cdot p+1}\right) & \text{für } (\mathrm{n}\cdot\mathrm{p}) \text{ ganzzahlig} \end{cases}$

Modus: *Häufigster Wert einer Verteilung.*

Teil 2: Klassierte Merkmalsausprägungen

Arithmetisches Mittel bei klassierten Merkmalsausprägungen:

$$\mu \quad = \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left[\left(x_i\right)_m \cdot n_i\right] \quad = \quad \sum_{i=1}^{k}\left[\left(x_i\right)_m \cdot \frac{n_i}{n}\right] \quad mit\ \left(x_i\right)_m\ als\ Klassenmitte\ der\ Klasse\ i$$

Modus / Modalwert:

- ⇨ **Modale Klasse: Klasse mit max. Häufigkeitsdichte**
- ⇨ **Modus / Modalwert: Wert der Klassenmitte der modalen Klasse**

Median und Quartile:

Median (bei intervallskaliertem Merkmal): $\overline{X}_{0,5} \in [a;b]$, $\overline{X}_{0,5} = a + \frac{\Delta_i \cdot (0{,}5 - F(a))}{p_i}$

unteres Quartil (bei intervallskaliertem Merkmal): $\overline{X}_{0,25} \in [a;b]$, $\overline{X}_{0,25} = a + \frac{\Delta_i \cdot (0{,}25 - F(a))}{p_i}$

oberes Quartil (bei intervallskaliertem Merkmal): $\overline{X}_{0,75} \in [a;b]$, $\overline{X}_{0,75} = a + \frac{\Delta_i \cdot (0{,}75 - F(a))}{p_i}$

Gini-Koeffizient: *Berechung der Flächen mit relativen kumulierten Häufigkeiten*

$$Gini \quad = \quad \frac{\text{Konzentrationsfläche K}}{\text{maximale Konzentrationsfläche K}_{\text{max}}}$$

Anmerkung: Als „*Konzentrationsfläche*" *K* bezeichnet man die Fläche, zwischen der Gleichverteilungsdiagonalen und der LORENZ-Kurve: $0 \leq K \leq 1/2$.

$$Wegen \quad K_{\max} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \quad lautet\ der\ normierte\ Gini-Koeffizient:$$

$$norm.\,Gini \quad = \quad K \cdot \frac{2n}{n-1}$$

Der Wertebereich des Gini-Koeffizienten liegt zwischen 0 (= Gleichverteilung) und 1 (= vollständige Konzentration auf einen Merkmalsträger).

Preisindizes

nach Laspeyres:

$$L_P = \frac{\sum p_{1i} \cdot q_{0i}}{\sum p_{0i} \cdot q_{0i}} = \sum \frac{p_{1i}}{p_{0i}} \cdot \frac{p_{0i} \cdot q_{0i}}{\sum p_{0i} \cdot q_{0i}} \quad mit\ i \in N$$

nach Paasche:

$$P_P = \frac{\sum p_{1i} \cdot q_{1i}}{\sum p_{0i} \cdot q_{1i}} = \sum \frac{p_{1i}}{p_{0i}} \cdot \frac{p_{0i} \cdot q_{1i}}{\sum p_{0i} \cdot q_{1i}} \quad mit\ i \in N$$

Lineare Regression und Korrelation

Ansatz:

$$y = b_0 + b_1 x \qquad \mu_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \mu_y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$b_1 = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{x^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i) - n \cdot \mu_x \cdot \mu_y}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^{\,2}\right) - n \cdot \mu_x^{\,2}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i) - \mu_x \cdot \mu_y}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^{\,2}\right) - \mu_x^{\,2}}$$

$$b_0 = \mu_y - b_1 \cdot \mu_x$$

Korrelation nach Brevais-Pearson:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_x)\cdot(y_i - \mu_y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_x)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu_y)^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i) - n \cdot \mu_x \cdot \mu_y}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^{\,2}\right) - n \cdot \mu_x^{\,2}} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i^{\,2}\right) - n \cdot \mu_y^{\,2}}}$$