# Klausur Wirtschaftsmathematik

## Fakultät für Technik

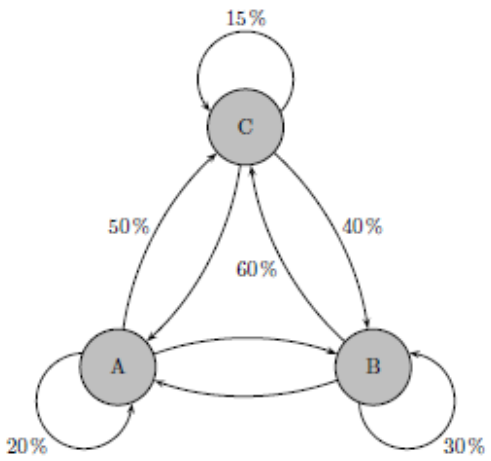
**Studiengang**: Integrated Engineering Datum: 20.12.2021

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Matrikelnummer:** | | | | **Dozent: Jürgen Meisel** | |
| **Kurs: TIE 19 EN1** | | **Semester:** | 4 | | |
| **Hilfsmittel:** ***Wiss. TR (nicht programmierbar) und Formelsammlung*** | | | | **Bearbeitungszeit: 90 min.** | |
| **Bewertung:** | Maximale Punktzahl: 90 | | | Erreichte Punktzahl: | |
| **Prozente:** | ..... | | | Signum: ..... | |
| **Anmerkungen:** | ***Von 7 gestellten Aufgaben müssen 6 ausgewählt und bearbeitet werden.*** | | | | |

| Aufgabennummer | | maximale Punkte | erreichte Punkte | Bemerkungen |
|---|---|---|---|---|
| **A 1:**<br>**Übergangsmatrizen und stat. Gleichgewicht** | | **15** | | |
| **A 2:**<br>**Leontief-Modell** | | **15** | | |
| **A 3:**<br>**Diff.-Rg I (Extrema ohne NB)** | | **15** | | |
| **A 4:**<br>**Diff.-Rg II (Extrema mit NB)** | | **15** | | |
| **A 5:**<br>**Dynamische Investitionsrechnung ($C_0$-Methode/Interner ZF)** | | **15** | | |
| **A 6:**<br>**Statistik I**<br>**Mittelwerte & Streumaße; Korrelation & Regression** | | **15** | | |
| **A 7:**<br>**Statistik II**<br>**Preisindexberechnung/ Warenkorbmethode** | | **15** | | |
| **Summe** | | **90** | | |

# Klausur QR-Methoden (20.12.2021)

**(1) Matrizen und Vektoren:**
**Übergangsmatrizen & Statisches Gleichgewicht**




Gegeben Sie ein Diagramm eines dynamischen Wechsel- bzw. Austauschprozesses hat folgendes Aussehen:

a) Bilden Sie die Übergangsmatrix.
b) Bestimmen Sie das statische Gleichgewicht prozentual **und** für n = 2680 [Personen].

Es ist die aktuelle Verteilung wie folgt gegeben:

$$\overrightarrow{v_{2020}} = \begin{pmatrix} 300 \\ 700 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Wie lautet $\overrightarrow{v_{2022}}$, wenn man von konstantem Übergangsverhalten ausgehen kann?

d) Zeigen Sie, dass man mit diesen Daten keinen Zustand für das Vorjahr 2019 ermitteln kann.

Lösung:

$$U = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,45 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0,5 & 0,6 & 0,15 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{v_{2020}} = \begin{pmatrix} 300 \\ 700 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(U-E)\cdot\vec{x} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} -0,8 & 0,1 & 0,45 \\ 0,3 & -0,7 & 0,4 \\ 0,5 & 0,6 & -0,85 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{x} = \frac{1}{106}\begin{pmatrix} 71z \\ 91z \\ 106z \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad x+y+z=1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{106}(71z+91z+106z)=1 \quad \rightarrow \quad \frac{268}{106}z=1$$

$$\rightarrow \quad z=\frac{106}{268} \quad \rightarrow \quad y=\frac{91}{268} \quad \rightarrow \quad x=\frac{71}{268}$$

$$\rightarrow \quad \frac{268}{106}z=2.680 \quad \rightarrow \quad z=1.060 \quad \rightarrow \quad y=910 \quad \rightarrow \quad x=710$$

$$\vec{v}_{2021} = U\cdot\vec{v}_{2020} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,45 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0,5 & 0,6 & 0,15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 700 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 130 \\ 300 \\ 570 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_{2022} = U\cdot\vec{v}_{2021} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,45 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0,5 & 0,6 & 0,15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 130 \\ 300 \\ 570 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 312,5 \\ 357 \\ 330,5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_{2020} = U\cdot\vec{v}_{2019} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,45 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0,5 & 0,6 & 0,15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 700 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12.000 \\ 9.000 \\ 4.000 \end{pmatrix}$$

Da der Wert für a < 0 ist, liegt keine gültige Lösung vor.

**(2) Leontief-Modell**

Die drei Zweigwerke (**A)**mmel, (**B)**ogel und (**C)**helsius des Unternehmens „Rasch und Ruh GmbH“ sind durch gegenseitigen Austausch nach dem Leontief-Modell miteinander verbunden.

| | $A$ | $B$ | $C$ | Konsum | Produktion |
|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | a | 20 | 12 | $y_1$ | 40 |
| $B$ | 0 | 4 | 0 | $y_2$ | 20 |
| $C$ | b | 0 | c | $y_3$ | 20 |

a) Bestimmen Sie die Werte für a, b und c und den Konsum, wenn folgende Technologiematrix gegeben ist:

$$T = \begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ \hline A & 0,2 & 1 & 0,6 \\ B & 0 & 0,2 & 0 \\ C & 0,2 & 0 & 0,2 \end{array}$$

b) Die Leontief-Inverse hat folgende Form: $(E-T)^{-1} = \frac{1}{p}\begin{pmatrix} 80 & 100 & 60 \\ 0 & 65 & 0 \\ 20 & 25 & 80 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie den Wert für den Parameter p.

c) Welche Produktionsmengen müssen in den jeweiligen Zweigwerken produziert werden, wenn mit einer externen Nachfrage von $\vec{y} = (13 \quad 16 \quad 8)^T$ kalkuliert wird und der Parameterwert **p = 52** betragen soll?

d) Laut einer Marktanalyse soll sich die Nachfrage nach den Produkten der drei Zweigwerke in den kommenden 12 Monaten entsprechend dem folgenden Konsumvektor gestalten:

$$\vec{y_k} = \begin{pmatrix} 14-0,4k \\ 20 \\ -0,1\cdot(k-12)^2+20 \end{pmatrix} \quad mit\ k \in \{0;1;2;...;11;12\}$$

Die Produkte aus **Zweigwerk A werden zu 300 GE**, von **Zweigwerk B zu 200 GE** und von **Zweigwerk C zu 100 GE** an den Markt abgegeben.

- ⇨ Zu welchem Zeitpunkt ist der Erlös maximal?
- ⇨ Wie hoch ist er dann?
- ⇨ Zeigen Sie auch, dass Ihr Ergebnis ein Maximum darstellt.

Lösung:

$$T=\begin{pmatrix}0,2 & 1 & 0,6\\ 0 & 0,2 & 0\\ 0,2 & 0 & 0,2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{a}{40} & 1 & 0,6\\ 0 & 0,2 & 0\\ \frac{b}{40} & 0 & \frac{c}{20}\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\ 8\\ 4\end{pmatrix} \rightarrow \vec{y}=\begin{pmatrix}0\\ 16\\ 8\end{pmatrix}$$

Ansatz:

$$(E-T)^{-1}\cdot(E-T) = \frac{1}{p}\begin{pmatrix}80 & 100 & 60\\ 0 & 65 & 0\\ 20 & 25 & 80\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0,2 & 1 & 0,6\\ 0 & 0,2 & 0\\ 0,2 & 0 & 0,2\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$(E-T)^{-1}\cdot(E-T) = \frac{1}{p}\begin{pmatrix}80 & 100 & 60\\ 0 & 65 & 0\\ 20 & 25 & 80\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0,8 & -1 & -0,6\\ 0 & 0,8 & 0\\ -0,2 & 0 & 0,8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Produkt aus 2. Zeile und 2. Spalte: $\frac{1}{p}\cdot 65\cdot 0,8=1 \quad\rightarrow\quad p=52$

$$Ansatz: \quad \vec{x} = (E-T)^{-1}\cdot\vec{y} \rightarrow \frac{1}{52}\begin{pmatrix}80 & 100 & 60\\ 0 & 65 & 0\\ 20 & 25 & 80\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}13\\ 16\\ 8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}60\\ 20\\ 25\end{pmatrix} = \vec{x}$$

$Ansatz: \quad Umsatz / Erlös$

$$E(k) = \vec{p}\cdot\vec{y_k} = (300 \quad 200 \quad 100)\cdot\begin{pmatrix}14-0,4k\\ 20\\ -0,1\cdot(k-12)^2+20\end{pmatrix}$$

$$E(k) = 4.200-120k+4.000-10\left(k^2-24k+144\right)+2.000$$

$$E(k) = 10.200-120k-10k^2+240k-1.440 = -10k^2+120k+8.760$$

$$E'(k) = -20k+120 = 0 \rightarrow k = 6$$

$$E''(k) = -20 < 0 \rightarrow Max\left(6 \mid E(6)=9.120\right)$$

**(3) Differentialrechnung I: Extrema ohne Nebenbedingungen**

Folgende Funktion ist gegeben durch: $f(x,y,z) = -\frac{1}{2}x^2 - y^2 - \frac{3}{2}z^2 + 2yz + 6x + 2y - 4z$

***Prüfen Sie, ob die Funktion ein Extremum besitzt - führen Sie einen vollständigen Nachweis durch.***

Lösung:

$$f_x(x,y,z) = -x+6 = 0 \rightarrow x = 6$$

$$f_y(x,y,z) = -2y+2z+2 = 0 \rightarrow y = z+1 \rightarrow y = -1$$

$$f_z(x,y,z) = -3z+2y-4 = 0 \rightarrow -3z+2(z+1) = 4 \rightarrow z = -2$$

$$\Rightarrow S(6 \mid -1 \mid -2 \mid f(6/-1/-2) = 21)$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} Det(H_1) = -1 < 0 \\ Det(H_2) = 2 > 0 \\ Det(H_3) = -2 < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} negativ\ definit \\ \rightarrow Maximum \end{matrix}\right.$$

$$NR: \quad Det(H_3) = -6+0+0-0-(-4)-0 = -6+4 = -2 < 0$$

**(4) Differentialrechnung II: Extrema mit Nebenbedingung**

Bei einer Ein-Produktunternehmung liegt folgende Produktionsfunktion vor:

$$f(x,y) = 40 \cdot x^{0,25} \cdot y^{0,75}$$

wobei x und y die ME der beiden eingesetzten Produktionsfaktoren $q_1$ und $q_2$ darstellen.
Die Faktorpreise für jeweils eine ME der beiden Produktionsfaktoren betragen $q_1$ = 3 GE und $q_2$ = 8 GE.

Das Unternehmen möchte bei einem **Budget von** $96k^2$ ein **maximales Produktionsvolumen** realisieren.

a) Lösen Sie das Problem mittels Lagrangemethode.
b) Welchen Wert besitzt der Lagrangeparameter im Maximalfall und welche ökonomische Aussage kann hier getroffen werden, wenn man das Budget um 10 Einheiten erhöhen würde?

***Anmerkung: Auf einen Nachweis des Maximums kann hier verzichtet werden!***

Lösung:

$$L(x,y,\lambda) = 40 \cdot x^{0,25} \cdot y^{0,75} + \lambda(96k^2 - 3x - 8y)$$

$$\left.\begin{matrix} L_x(x,y,\lambda) = 10 \cdot \frac{y^{0,75}}{x^{0,75}} - 3\lambda = 0 \rightarrow \lambda = \frac{10}{3} \cdot \frac{y^{0,75}}{x^{0,75}} \\ L_y(x,y,\lambda) = 30 \cdot \frac{x^{0,25}}{y^{0,25}} - 8\lambda = 0 \rightarrow \lambda = \frac{15}{4} \cdot \frac{x^{0,25}}{y^{0,25}} \end{matrix}\right\} \frac{10}{3} \cdot \frac{y^{0,75}}{x^{0,75}} = \frac{15}{4} \cdot \frac{x^{0,25}}{y^{0,25}}$$

$$\rightarrow Austauschverhältnis: \quad y = \frac{9}{8} \cdot x \xrightarrow{y = \frac{9}{8} \cdot x \ in\ NB} 96k^2 = 3x + 8 \cdot \frac{9}{8}x = 12x$$

$$\rightarrow x = 8k^2 \quad und \quad y = 9k^2 \quad und \quad f(8k^2/9k^2) = 40 \cdot (8k^2)^{0,25} \cdot (9k^2)^{0,75} = 40 \cdot k^2 \cdot 8^{0,25} \cdot 9^{0,75} = 349k^2$$

$$Lagrangeparameter: \rightarrow \lambda = \frac{10}{3} \cdot \left(\frac{9k^2}{8k^2}\right)^{0,75} = \frac{10}{3} \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^{0,75} = 3,64$$

Eine Änderung des Budgets um k [GE] führt zu einer Änderung der Produktion um k * 3,64 [ME]

## (5) Dynamische Investitionsrechnung: Kapitalwertmethode & Interner Zinsfuß

Sie arbeiten in der Controllingabteilung der Knacknuss-GmbH. Die Geschäftsleitung steht vor der Auswahl eines Investitionsvorhabens, dabei stehen zwei Maschinen (Invest1 und Invest2) in der engeren Auswahl.
Ihre Aufgabe als Controller ist es, die vorhandenen Informationen entsprechend zu verarbeiten und somit die Geschäftsführung bei der Auswahlentscheidung zu unterstützen. Ihnen stehen folgende Informationen bzgl. der Zahlungsfolgen der Investitionen zur Verfügung:

| | **Investitionsobjekt I** | **Investitionsobjekt II** |
|---|---|---|
| **Anschaffungswert** | 20.000,00 € | 20.000,00 € |
| **Liquidationserlös** | 2.000,00 € | 4.000,00 € |
| **Nutzungsdauer** | 6 Jahre | 6 Jahre |
| **Überschüsse** | | |
| **Jahr 1** | 8.000,00 € | 2.000,00 € |
| **Jahr 2** | 5.000,00 € | 2.000,00 € |
| **Jahr 3** | 3.000,00 € | 3.000,00 € |
| **Jahr 4** | 3.000,00 € | 3.000,00 € |
| **Jahr 5** | 2.000,00 € | 1.000,00 € |
| **Jahr 6** | 1.000,00 € | 11.000,00 € |

a) Ermitteln Sie welches Investitionsobjekt zu einem Kalkulationssatz von 5 % das vorteilhaftere ist, wenn nach 6 Jahren die Liquidation stattfindet.
b) Wie hoch müsste der Liquidationserlös für Investitionsobjekt I sein, damit die Investitionsentscheidung zwischen I und II indifferent wird?
c) Wie hoch ist der Interne Zinsfuß von Investitionsobjekt I?

Lösung:

$$C_{0;I} = \left(-20+\frac{8}{1,05}+\frac{5}{1,05^2}+\frac{3}{1,05^3}+\frac{3}{1,05^4}+\frac{2}{1,05^5}+\frac{3}{1,05^6}\right)\cdot 10^3 = 1.019,51$$

$$C_{0;II} = \left(-20+\frac{2}{1,05}+\frac{2}{1,05^2}+\frac{3}{1,05^3}+\frac{3}{1,05^4}+\frac{1}{1,05^5}+\frac{15}{1,05^6}\right)\cdot 10^3 = 755,20$$

Beide Investitionsprojekte sind rentabel, allerdings ist Projekt I besser als Projekt II wegen des höheren Kapitalwerts.

*Ansatz* 1:

$$C_{0;II} = C_{0;I}+\frac{x}{1,05^6} \rightarrow 755,20 = 1.019,51+\frac{x}{1,05^6} \xrightarrow[\cdot 1,05]{-1.019,51} x=-264,31\cdot 1,05^6=-354,20$$

$$\xrightarrow[\text{Liquidationserlös}]{\text{neuer}} Liqu_{neu} = 2.000,00-354,20 = 1.645,80$$

*Oder Ansatz* 2:

$$C_{0;I}=\left(-20+\frac{8}{1,05}+\frac{5}{1,05^2}+\frac{3}{1,05^3}+\frac{3}{1,05^4}+\frac{2}{1,05^5}+\frac{x}{1,05^6}\right)\cdot 10^3 \overset{!}{\underset{C_{0;II}}{=}} 755,20 \rightarrow x=2.645,79$$

$$\xrightarrow{-1.000} Liqu_{neu}=1.645,79$$

Interner Zinsfuß von Projekt I:

$$0=-20+\frac{8}{q}+\frac{5}{q^2}+\frac{3}{q^3}+\frac{3}{q^4}+\frac{2}{q^5}+\frac{3}{q^6} \xrightarrow{\cdot q^6} 0=-20q^6+8q^5+5q^4+3q^3+3q^2+2q+3$$

$$\rightarrow q=1,07013 \rightarrow i=0,07013 \rightarrow p=7,013[\%]$$

**(6) Deskriptive Statistik I:**
**Häufigkeitsverteilung / Mittelwerte / Streumaße / Korrelation / Regression**

Im Frachthafen Mannheim werden im Laufe eines Monats mehrere Frachtschiffe beladen. Die Größe der Schiffe wird durch ihre Ladekapazität (in Tonnen) angegeben.

Im Laufe des Monats Mai werden die in der Tabelle angegebenen Werte ermittelt, wobei eine Klasseneinteilung gewählt wird.

Nehmen Sie Gleichverteilung in den einzelnen Klassen an.

| **Gewicht (to)** | **absolute Häufigkeit** | **relative Häufigkeit** | **Klassen-mitte** | **Klassen-breite** | **Häufigkeits-dichte** | **kum. rel. Häufigkeit** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **[0 ; 500[** | **30** | | | | | |
| **[500 ; 1.000[** | **60** | | | | | |
| **[1.000 ; 2.000[** | **70** | | | | | |
| **[2.000 ; 3.000[** | **30** | | | | | |
| **[3.000 ; 5.000[** | **10** | | | | | |
| **Summe** | | | | | | |

a) Vervollständigen Sie die Tabelle.

b) Bestimmen Sie den arithmetischen Mittelwert, die modale Klasse und den Modalwert.

c) Bestimmen Sie den Median, das untere Quartil und das obere Quartil.

Lösung:

| Gewicht (to) | absolute Häufig. | relative Häufig. | Klassen-mitte | Klassen-breite | Häufigkeits-dichte | kum. rel. Häufig. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| [0 ; 500[ | 30 | **0,15** | **250** | **500** | **0,06** | **0,15** |
| [500 ; 1.000[ | 60 | **0,30** | **750** | **500** | **0,12** | **0,45** |
| [1.000 ; 2.000[ | 70 | **0,35** | **1.500** | **1.000** | **0,07** | **0,80** |
| [2.000 ; 3.000[ | 30 | **0,15** | **2.500** | **1.000** | **0,03** | **0,95** |
| [3.000 ; 5.000[ | 10 | **0,05** | **4.000** | **2.000** | **0,005** | **1,00** |
| Summe | **200** | **1,00** | **---** | **---** | **---** | **---** |

$$\bar{x} = 250 \cdot 0{,}15 + 750 \cdot 0{,}3 + 1.500 \cdot 0{,}35 + 2.500 \cdot 0{,}15 + 4.000 \cdot 0{,}05 = 1.362{,}5$$

$$\textit{Modale Klasse}: \ [500\,;1.000] \ \textit{wegen } HD_{\max} = 0{,}12 \ \rightarrow \ \textit{Modalwert}: \overline{x_{Mod}} = 750$$

$$\overline{x_{Median}} = 1.000 + \frac{1.000(0,5-0,45)}{0,35} = 1.142,86$$

$$\overline{x_{quartile\,1}} = 500 + \frac{500(0,25-0,15)}{0,3} = 666,67$$

$$\overline{x_{quartile\,3}} = 1.000 + \frac{1.000(0,75-0,45)}{0,35} = 1.857,14$$

d) Korrelations- & Regressionsanalyse

Eine Gruppe von Psychologen hat folgende Untersuchung durchgeführt, um die Merkfähigkeit $y_i$ in Abhängigkeit des Alters $x_i$ zu analysieren:
Es ergab sich nebenstehendes Messergebnis:

| | Alter | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 35 | 45 | 55 | 65 |
| $n_i$ | 5 | 5 | 4 | 6 |
| $y_i$ | 120 | 85 | 120 | 55 |
| | 90 | 95 | 65 | 70 |
| | 110 | 90 | 80 | 110 |
| | 75 | 73 | 70 | 45 |
| | 115 | 120 | | 50 |
| | | | | 52 |

i. Ermitteln Sie die zugehörige Regressionsgerade y.
ii. Wie hoch ist die voraussichtliche Merkfähigkeit bei einem Alter von 40 bzw. 60?
iii. Eine Person besitzt eine Merkfähigkeit von 123. In welches Alter kann sie mittels Regression zugeordnet werden?
iv. Berechnen Sie den zugehörigen Korrelationskoeffizient nach Pearson.

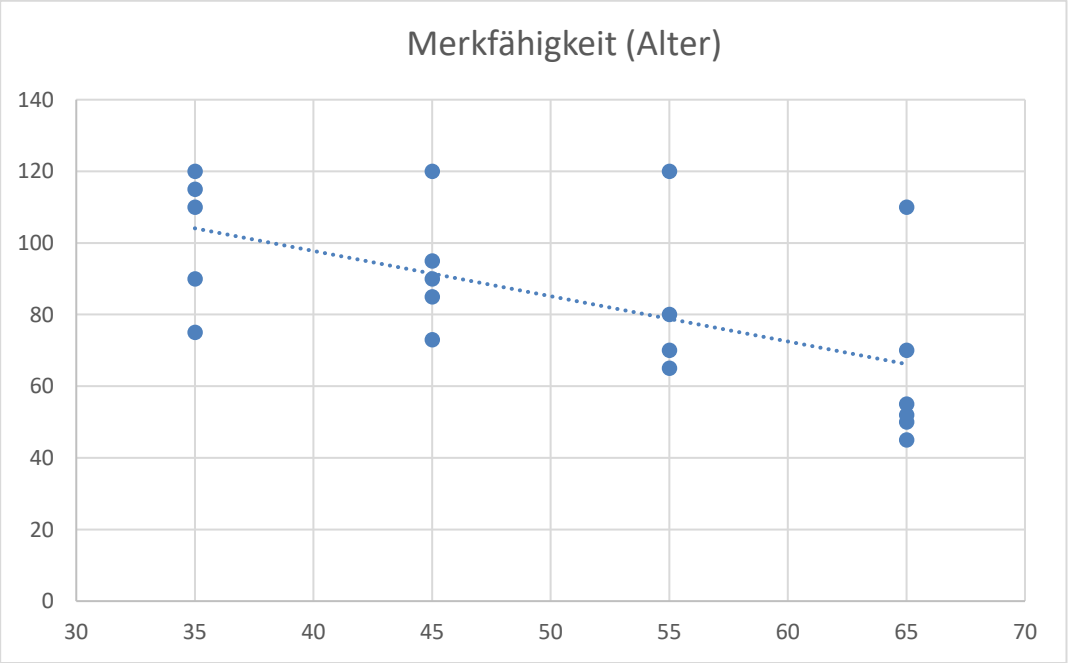
Lösung:

i) Regressionsgerade: $y = 148,3 - 1,2635 \cdot x$

ii) $y_1 = 148,3 - 1,2635 \cdot 40 = 97,77$ *und* $y_2 = 148,3 - 1,2635 \cdot 60 = 72,50$

iii) $123 = 148,3 - 1,2635 \cdot x \rightarrow x = 20,03\,[Jahre]$

iv) moderat negative Korrelation: $r = -0,6012$



**(7) Deskriptive Statistik I:**
**Warenkorbmethode und Preisindexberechnung**

Für 5 Güter sind die Preise $\mathbf{p_{I,i}}$ und $\mathbf{p_{II,i}}$ und die Umsätze $\mathbf{u_{I,i}}$ und $\mathbf{u_{II,i}}$ in den Perioden I und II in nachfolgender Tabelle gegeben:

| | **Periode I** | | | **Periode II** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nummer | Preis $\mathbf{p_{I,i}}$ | | Umsatz $\mathbf{u_{I,i}}$ | Preis $\mathbf{p_{II,i}}$ | | Umsatz $\mathbf{u_{II,i}}$ |
| **1** | **5** | | **50** | **6** | | **48** |
| **2** | **4** | | **200** | **6** | | **240** |
| **3** | **10** | | **80** | **9** | | **144** |
| **4** | **8** | | **48** | **10** | | **40** |
| **5** | **3** | | **30** | **3** | | **24** |

a) Bestimmen Sie die Preisindizes nach Laspeyres, Paasche und Fisher mit **I als Basisperiode** und **II als Berichtsperiode**.

b) Ermitteln Sie die Inflationsrate **auf der Basis des Preisindex nach Laspeyres**, wenn **I = 2015** und **II = 2020** gilt.

c) Es gelte nun **II als Basisperiode** und **I als Berichtsperiode**.
Zudem ist die Inflation **bei – 3,46 %** auf der Basis von Laspeyres
- wenn **I = 2015** und **II = 2020** gilt.
Bestimmen Sie daraus die Preisindizes nach Laspeyres und Paasche, wenn zudem bekannt ist, dass der Preisindex nach **Fisher** $F_P = \frac{1}{1,2351}$ beträgt.

Lösung:

| | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | | **Periode I** | | | **Periode II** | | |
| 5 | **Nummer** | **Preis I** | **Menge I** | **Umsatz I** | **Preis II** | **Menge II** | **Umsatz II** |
| 6 | **1** | **5** | **10** | **50** | **6** | **8** | **48** |
| 7 | **2** | **4** | **50** | **200** | **6** | **40** | **240** |
| 8 | **3** | **10** | **8** | **80** | **9** | **16** | **144** |
| 9 | **4** | **8** | **6** | **48** | **10** | **4** | **40** |
| 10 | **5** | **3** | **10** | **30** | **3** | **8** | **24** |
| 11 | **Summe:** | | | **408** | | | **496** |
| 12 | | | | | | | |
| 13 | | | | | | | |
| 14 | **Basisperiode I** | | | **Laspeyres:** | **1,2794** | | **Inflation:** |
| 15 | **Berichtsperiode II** | | | **Paasche:** | **1,1923** | | |
| 16 | | | | **Fisher:** | **1,2351** | | |
| 17 | | | | | | | |
| 18 | | | | | | | |
| 19 | **Basisperiode II** | | | **Laspeyres:** | **0,8387** | | **Inflation:** |
| 20 | **Berichtsperiode I** | | | **Paasche:** | **0,7816** | | |
| 21 | | | | **Fisher:** | **0,8097** | **1/G16** | |

Berechnungen:

$$Laspeyres: \quad L_P = \frac{\sum p_{1i} \cdot q_{0i}}{\sum p_{0i} \cdot q_{0i}}$$

$$\rightarrow \frac{\text{Ausgaben des Berichtsjahres mit Mengen des Basisjahres (Menge}_{\text{Periode I}} * \text{Preis}_{\text{Periode II}})}{\text{Ausgaben/Umsatz des Basisjahres (Menge}_{\text{Periode I}} * \text{Preis}_{\text{Periode I}})}$$

$$L_P = \frac{6 \cdot 10 + 6 \cdot 50 + 9 \cdot 8 + 10 \cdot 6 + 3 \cdot 10}{408} = \frac{522}{408} = 1,2794$$

$$Paasche: \quad P_P = \frac{\sum p_{1i} \cdot q_{1i}}{\sum p_{0i} \cdot q_{1i}}$$

$$\rightarrow \frac{\text{Ausgaben/Umsatz des Berichtsjahres (Menge}_{\text{Periode II}} * \text{Preis}_{\text{Periode II}})}{\text{Ausgaben des Basisjahres mit Mengen des Berichtsjahres (Menge}_{\text{Periode II}} * \text{Preis}_{\text{Periode I}})}$$

$$P_P = \frac{496}{5 \cdot 8 + 4 \cdot 40 + 10 \cdot 16 + 8 \cdot 4 + 3 \cdot 8} = \frac{496}{416} = 1,1923$$

$$F_P = \sqrt{L_P \cdot P_P} \rightarrow \sqrt{1,2794 \cdot 1,1923} = 1,2351$$

$$\text{Inflationsrate:} \quad \sqrt[5]{1,2794} = 1,0505 \rightarrow i_{eff} = 1,0505 - 1 = 0,0505 \xrightarrow{\cdot 100} 5,05\%$$

$$Gegeben: \quad F_P(neu) = \frac{1}{1,2351} = 0,8097 \quad und \quad i_{eff}(neu) = -0,0346$$

$$Ansatz\ aufgrund\ L_P: \quad \sqrt[5]{x} = 0,9654 \rightarrow L_P = 0,9654^5 = 0,8387$$

$$\xrightarrow{mit\ Fisher} F_P = \sqrt{L_P \cdot P_P} \rightarrow \sqrt{0,8387 \cdot P_P} = 0,8097 \rightarrow P_P = 0,7816$$