Übung Klausuraufgaben (30.05.2022)

(1) Matrizen und Vektoren: Übergangsmatrizen & Statisches Gleichgewicht

„Horch“ ist einer der weltgrößten Automobilhersteller. Bei Firmenkunden ist besonders das Luxusmodell „H-Hurtig“ gefragt. Dieses wird wahlweise mit Kraftstoff- oder Erdgasantrieb angeboten. Die meisten Kunden leasen ein Fahrzeug für jeweils ein Jahr und wechseln anschließend auf ein neueres Modell. Dabei kann die Antriebstechnik immer wieder neu zwischen den Varianten Benzin, Diesel und Erdgas gewählt werden.

Die bisherigen Kunden eines Benzinmodells wählen zu 60 % beim nächsten Fahrzeug wieder ein Benzinmodell, 15 % wechseln zur Dieselvariante. Von den bisherigen Dieselfahrern bleiben 75 % bei dieser Technik, 5 % testen den Erdgasantrieb.
Erdgasfans bleiben aus Umweltschutzgründen zu 80 % ihrer vorherigen Wahl treu, 15 % entscheiden sich für Benzin, der Rest wählt Diesel.
Im Jahr 2018 konnte man folgende Verteilung der einzelnen Antriebsarten feststellen: Benzin: 28 % Diesel: 60 % Erdgas: 12 %

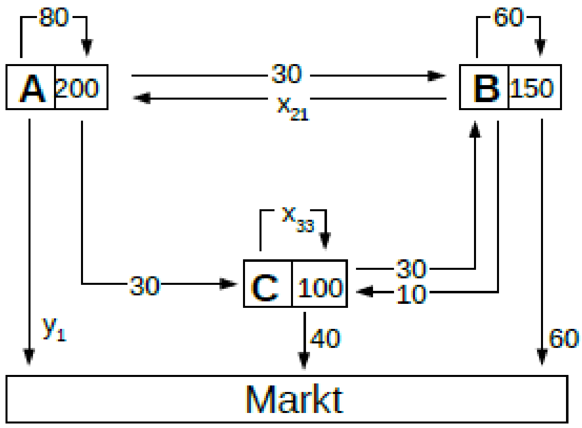
1.) Erstellen Sie die Übergangsmatrix.
2.) Welche Anteile sind 2019 zu erwarten?
3.) Wie waren die Anteile im Jahr 2017?
4.) Die Produktion der Fahrzeuge mit Erdgasantrieb ist nur rentabel, wenn langfristig ein Anteil von ca. 30 % erreicht werden kann. Untersuchen Sie, ob dies bei gleichbleibendem Wechselverhalten zu erwarten ist.

(2) Leontief-Modell 1

Drei Zweigwerke A, B und C eines Unternehmens sind miteinander nach dem LEONTIEF-Modell verflochten. Das Diagramm stellt die Verflechtung dar (Angaben in Mengeneinheiten).

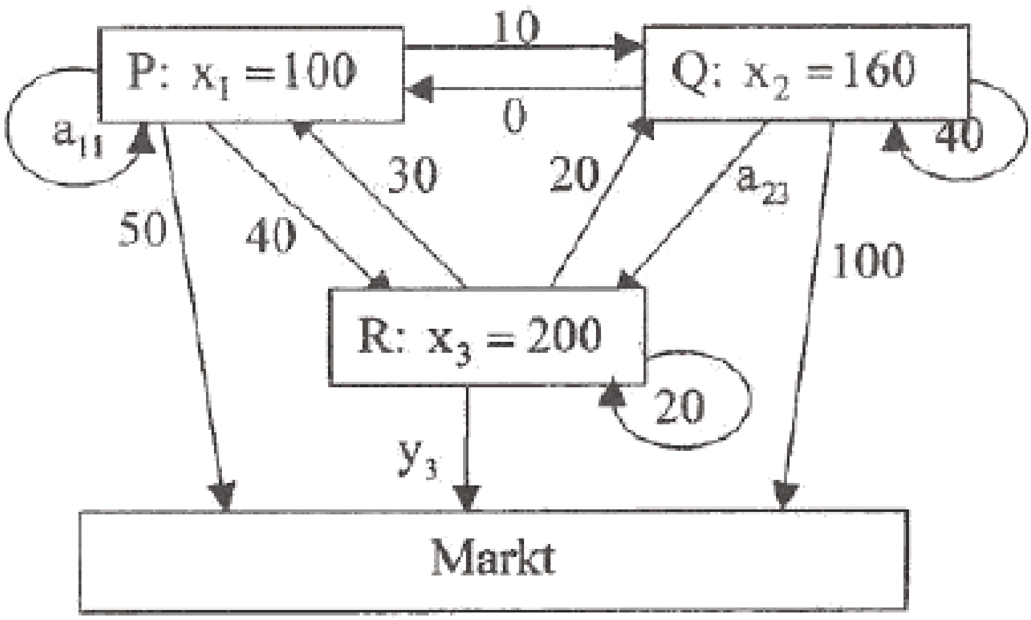
[01] Bestimmen Sie die Inputmatrix.

[02] In einem früheren Zeitraum betrug der Marktvektor: $\mathbf{y}=(410, 450, 50)^T$.
Berechnen Sie den zugehörigen Produktionsvektor $\mathbf{x}$, und stellen Sie die Verflechtung in einer Tabelle dar.



(3) Leontief-Modell 2

Die drei Zweigwerke p, Q und R eines Unternehmens sind untereinander in folgender Form verfloch-
ten und es
gibt folgende die im Gozintographen dargestellten Marktabgaben:



a) Bestimmen Sie die Inputmatrix A und erstellen Sie die Input-Output-Tabelle

b) Zu einem bestimmten Zeitpunkt war der Marktvektor $\vec{y} = \begin{pmatrix}57 & 26 & 60\end{pmatrix}^T$

Bestimmen Sie den zugehörigen Produktionsvektor $\vec{x}$

c) Berechnen Sie den Wert für t, bei dem die Summe der Marktabgaben alle drei Zweigwerke maximal ist, wenn nachfolgende Umstellung des Produktionsverfahren durchgeführt wurde: Nach einer Umstellung der Produktion kann das Verfahren gemäß folgender Technologie-/Inputmatrix dargestellt werden:

$$T(t) = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1t^2 & 0,2 \\ 0 & 0,1t^2 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0,1 \end{pmatrix} \quad mit\ t \in [0,5\,;3]\ und\ t \in \Re \text{ als Technologieparameter}$$

Für die Produktion ist folgendes Volumen vorgesehen: $\vec{x} = \begin{pmatrix}200 & 40t & 100\end{pmatrix}^T$

(4) Simplexalgorithmus: Lineare Optimierung

Cocktails:

- Daiquiri (45 ml weißer Rum, 30 ml Cointreau, 30 ml Zitronensaft, 15 ml Zuckersirup, Eis), 5.50 Euro
- Kamikaze (30 ml Wodka, 30 ml Cointreau, 30 ml Zitronensaft, 1 Schuß Limonensirup, Eis), 4.50 Euro
- Long Island Ice Tea (20 ml Wodka, 20 ml weißer Rum, 20 ml Gin, 20 ml Cointreau, 4 TL Zitronensaft, 4 TL Orangensaft, 1/8 l Cola, 1 Orangenscheibe, Eis), 7.00 Euro

Vorhandene Spirituosen: 5 l weißer Rum, 6 l Cointreau, 4 l Wodka und 3 l Gin

Welche Cocktails muß der Barkeeper mixen, um möglichst viel Geld einzunehmen?

=> Bestimmen Sie die Lösung rechnerisch.

Zur Kontrolle: x = 44,44 y = 33,33 z = 150

(5) Differentialrechnung: Extrema ohne und mit Nebenbedingungen

<u>Teil 1:</u> Extrema ohne Nebenbedingungen

Ermitteln Sie die stationären Stellen der Funktion $f(x,y,z) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{3}y^3 - 4y^2 + \frac{1}{4}(z-2)^3$ und untersuchen Sie diese Stellen auf ihre Extremwerteigenschaft und berechnen Sie die Extremwerte.

<u>Teil 2:</u> Extrema ohne Nebenbedingungen

Ermitteln Sie die stationären Stellen der Funktion $f(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{9}{y} + x - y$ und untersuchen Sie diese Stellen auf ihre Extremwerteigenschaft und berechnen Sie die Extremwerte.
Warum ist der Funktionswert des Maximums kleiner als der Funktionswert des Minimums?

<u>Teil 3:</u> Optimum mit Nebenbedingungen

Gegeben sei folgende Produktionsfunktion:

$$f(x,y) = 2x^{0,6} \cdot y^{0,4}$$

Die Mengeneinheit für x kostet 8,00 €, der Preis für eine Mengeneinheit von y liegt bei 6,50 €.
Insgesamt stehen uns 10.000,00 € zur Verfügung.
Wie viel kann man unter den gegebenen Bedingungen produzieren?

a) Lösen Sie das Problem mittels Lagrangemethode.
b) Welchen Wert besitzt der Lagrangeparameter im Maximumfall und welche ökonomische Aussage kann hier getroffen werden.

(6) Deskriptive Statistik I:

Häufigkeitsverteilung / Mittelwerte / Streumaße / Konzentrationsprozess

Im Frachthafen Mannheim werden im Laufe eines Monats mehrere Frachtschiffe beladen. Die Größe der Schiffe wird durch ihre Ladekapazität (in Tonnen) angegeben. Im Laufe des Monats Mai werden die in der Tabelle angegebenen Werte ermittelt, wobei eine Klasseneinteilung gewählt wird.
Nehmen Sie Gleichverteilung in den einzelnen Klassen an.

Gewicht (to)	absolute Häufig.	relative Häufig.	Klassen-mitte	Klassen-breite	Häufigkeits-dichte	kum. rel. Häufig.
[0 ; 500[	30					
[500 ; 1.000[	60					
[1.000 ; 2.000[	70					
[2.000 ; 3.000[	30					
[3.000 ; 5.000[	10					
Summe						

a) Vervollständigen Sie die Tabelle.
b) Zeichnen Sie das zugehörige Histogramm.
c) Bestimmen Sie den arithmetischen Mittelwert, die modale Klasse und den Modalwert.
d) Bestimmen Sie den Median, das untere Quartil und das obere Quartil.
e) Zeichnen Sie nun noch die Lorenzkurve und berechnen Sie den zugehörigen Ginikoeffizienten. Beurteilen Sie auch kurz Ihr Ergebnis.

(7) Deskriptive Statistik II: Korrelations- & Regressionsanalyse

Ein Mathematiklehrer möchte untersuchen, wie sich der Lernaufwand seiner Schüler auf die Punkte bei der Mathematikschularbeit auswirkt. Dabei erhebt er bei 13 Schülern folgende Daten (Lernaufwand in Stunden):

Lernaufwand	18	4	12	10	23	10	8	17	13	16	13	7	14
Punkte bei SA	29	5	19	21	26	28	16	19	14	30	18	3	11

(a) Zu welchem Schluss kommt er anhand der Daten?

(b) Welche Punktzahl ist zu erwarten bei einer Lernzeit von 15 Stunden?

(c) Wie lange muss man für 25 Punkte lernen?

(8) Rechentechnik: Herleitung der Rechenformel zur Varianz

Leiten Sie aus der Definitionsformel der Varianz die zugrundeliegende Rechenformel her:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\overline{x}\right)^2$$