Übung Klausuraufgaben (30.05.2022)

(1) Matrizen und Vektoren: Übergangsmatrizen & Statisches Gleichgewicht

„Horch“ ist einer der weltgrößten Automobilhersteller. Bei Firmenkunden ist besonders das Luxusmodell „H-Hurtig“ gefragt. Dieses wird wahlweise mit Kraftstoff- oder Erdgasantrieb angeboten. Die meisten Kunden leasen ein Fahrzeug für jeweils ein Jahr und wechseln anschließend auf ein neueres Modell. Dabei kann die Antriebstechnik immer wieder neu zwischen den Varianten Benzin, Diesel und Erdgas gewählt werden.

Die bisherigen Kunden eines Benzinmodells wählen zu 60 % beim nächsten Fahrzeug wieder ein Benzinmodell, 15 % wechseln zur Dieselvariante. Von den bisherigen Dieselfahrern bleiben 75 % bei dieser Technik, 5 % testen den Erdgasantrieb.
Erdgasfans bleiben aus Umweltschutzgründen zu 80 % ihrer vorherigen Wahl treu, 15 % entscheiden sich für Benzin, der Rest wählt Diesel.
Im Jahr 2018 konnte man folgende Verteilung der einzelnen Antriebsarten
feststellen: Benzin: 28 % Diesel: 60 % Erdgas: 12 %

1.) Erstellen Sie die Übergangsmatrix.
2.) Welche Anteile sind 2019 zu erwarten?
3.) Wie waren die Anteile im Jahr 2017?
4.) Die Produktion der Fahrzeuge mit Erdgasantrieb ist nur rentabel, wenn langfristig ein Anteil von ca. 30 % erreicht werden kann. Untersuchen Sie, ob dies bei gleichbleibendem Wechselverhalten zu erwarten ist.

Übergangsmatrix:

$$U = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,15 \\ 0,15 & 0,75 & 0,05 \\ 0,25 & 0,05 & 0,8 \end{pmatrix} \qquad \vec{z}_{18} = \begin{pmatrix} 0,28 \\ 0,60 \\ 0,12 \end{pmatrix} \qquad U \cdot \vec{z}_{18} = \begin{pmatrix} 0,306 \\ 0,498 \\ 0,196 \end{pmatrix}$$

$$U \cdot \vec{z}_{17} = \vec{z}_{18} \xrightarrow{LGS} \vec{z}_{17} = \begin{pmatrix} 0,2048 \\ 0,7565 \\ 0,0387 \end{pmatrix}$$

$$U \cdot \vec{x} = \vec{x} \xrightarrow{LGS} (U - E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 0,2969 \\ 0,2656 \\ 0,4375 \end{pmatrix}$$

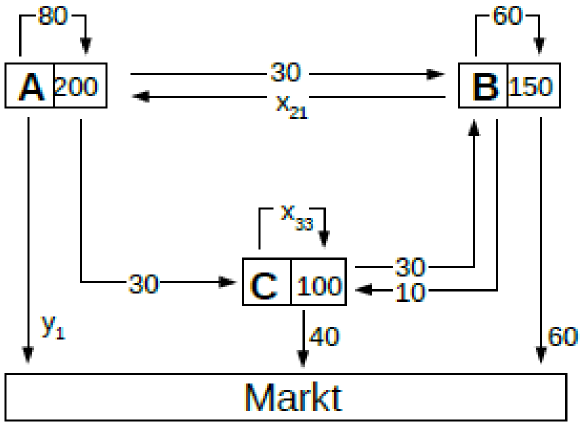
Die 30%-Grenze wird überschritten.

(2) Leontief-Modell 1

Drei Zweigwerke A, B und C eines Unternehmens sind miteinander nach dem LEONTIEF-Modell verflochten. Das Diagramm stellt die Verflechtung dar (Angaben in Mengeneinheiten).

[01] Bestimmen Sie die Inputmatrix.

[02] In einem früheren Zeitraum betrug der Marktvektor: **y**=(410, 450, 50)^T.
Berechnen Sie den zugehörigen Produktionsvektor **x**, und stellen Sie die Verflechtung in einer Tabelle dar.



Lösung:

	A	B	C	$Markt\ y_i$	$Gesamt\ x_i$
A	80	30	30	$y_1 = 200 - 140 = 60$	200
B	$x_{21} = 150 - 130 = 20$	60	10	60	150
C	0	30	$x_{33} = 100 - 70 = 30$	40	100

$$A = \begin{pmatrix} 80 & 30 & 30 \\ 20 & 60 & 10 \\ 0 & 30 & 30 \end{pmatrix} \xrightarrow{\vec{x} = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \frac{80}{200} & \frac{30}{150} & \frac{30}{100} \\ \frac{20}{200} & \frac{60}{150} & \frac{10}{100} \\ \frac{0}{200} & \frac{30}{150} & \frac{30}{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 & 0,1 \\ 0 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix} = T$$

$$E - T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 & 0,1 \\ 0 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,2 & -0,3 \\ -0,1 & 0,6 & -0,1 \\ 0 & -0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$$

Neuer Markt-/Konsumvektor: $\vec{y} = \begin{pmatrix} 410 & 450 & 50 \end{pmatrix}^T$

$$\vec{x} = (E - T)^{-1} \cdot \vec{y}$$

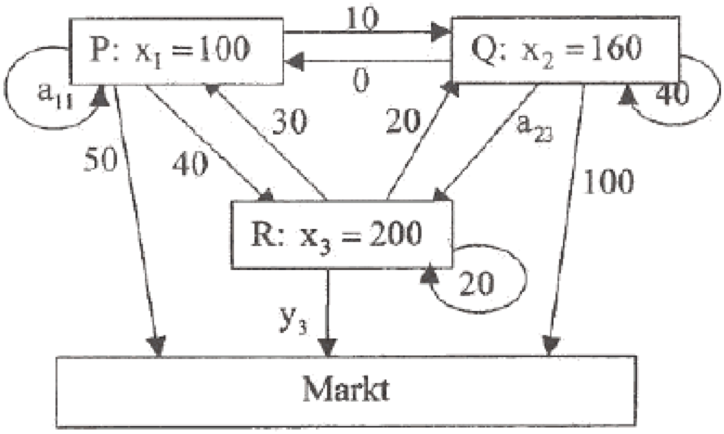
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,2 & -0,3 \\ -0,1 & 0,6 & -0,1 \\ 0 & -0,2 & 0,7 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 410 \\ 450 \\ 50 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 20 & 10 & 10 \\ 3,5 & 21 & 4,5 \\ 1 & 6 & 17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 410 \\ 450 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1200 \\ 1010 \\ 360 \end{pmatrix}$$

Berechnung der neuen Verflechtungswerte/-matrix:

$$T = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 & 0,1 \\ 0 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\vec{x} = \begin{pmatrix} 1200 \\ 1010 \\ 360 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 480 & 202 & 108 \\ 120 & 404 & 36 \\ 0 & 202 & 108 \end{pmatrix} = A_{neu}$$

(3) Leontief-Modell 2

Die drei Zweigwerke p, Q und R eines Unternehmens sind untereinander in folgender Form verflochten und es
gibt folgende die im Gozintographen dargestellten Marktabgaben:



a) Bestimmen Sie die Inputmatrix A und erstellen Sie die Input-Output-Tabelle

b) Zu einem bestimmten Zeitpunkt war der Marktvektor $\vec{y} = (57 \quad 26 \quad 60)^T$

Bestimmen Sie den zugehörigen Produktionsvektor $\vec{x}$

c) Berechnen Sie den Wert für t, bei dem die Summe der Marktabgaben alle drei Zweigwerke maximal ist, wenn nachfolgende Umstellung des Produktionsverfahren durchgeführt wurde: Nach einer Umstellung der Produktion kann das Verfahren gemäß folgender Technologie-/Inputmatrix dargestellt werden:

$$T(t) = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1t^2 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}1t^2 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}1 \end{pmatrix} \quad mit\ t \in [0{,}5\,;3]\ und\ t \in \Re \text{ als Technologieparameter}$$

Für die Produktion ist folgendes Volumen vorgesehen: $\vec{x} = (200 \quad 40t \quad 100)^T$

Lösung:

	P	Q	R	$Markt\ y_i$	$Gesamt\ x_i$
P	$x_{11} = 100 - 100 = 0$	10	40	50	100
Q	0	40	$x_{23} = 160 - 140 = 20$	100	160
R	30	20	20	$y_3 = 200 - 70 = 130$	200

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 40 \\ 0 & 40 & 20 \\ 30 & 20 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow{\vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 160 \\ 200 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 & \frac{10}{160} & \frac{40}{200} \\ 0 & \frac{40}{160} & \frac{20}{200} \\ \frac{30}{100} & \frac{20}{160} & \frac{20}{200} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}0625 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}125 & 0{,}1 \end{pmatrix} = T$$

Markt-/Konsumvektor: $\vec{y} = \begin{pmatrix} 57 & 26 & 60 \end{pmatrix}^T$

$$E-T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0,0625 & 0,2 \\ 0 & 0,25 & 0,1 \\ 0,3 & 0,125 & 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0,0625 & -0,2 \\ 0 & 0,75 & -0,1 \\ -0,3 & -0,125 & 0,9 \end{pmatrix}$$

$$(E-T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0,0625 & -0,2 \\ 0 & 0,75 & -0,1 \\ -0,3 & -0,125 & 0,9 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{985}\begin{pmatrix} 1060 & 130 & 250 \\ 48 & 1344 & 32 \\ 360 & 230 & 1200 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = (E-T)^{-1} \cdot \vec{y} \quad \to \quad \vec{x} = \frac{1}{985}\begin{pmatrix} 1060 & 130 & 250 \\ 48 & 1344 & 32 \\ 360 & 230 & 1200 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 57 \\ 26 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 48 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Neuer Produktionsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 200 & 40t & 100 \end{pmatrix}^T$

Neue Technologiematrix:

$$T(t) = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1t^2 & 0,2 \\ 0 & 0,1t^2 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0,1 \end{pmatrix} \quad \textit{mit } t \in [0,5\,;3] \textit{ und}$$
$t \in \Re$ als Technologieparameter

$$\vec{y} = (E-T_{neu}) \cdot \vec{x} \quad \textit{und} \quad (E-T_{neu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1t^2 & 0,2 \\ 0 & 0,1t^2 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,1t^2 & -0,2 \\ 0 & 1-0,1t^2 & -0,1 \\ 0 & -0,4 & 0,9 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,1t^2 & -0,2 \\ 0 & 1-0,1t^2 & -0,1 \\ 0 & -0,4 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 40t \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140-4t^3 \\ -4t^3+40t-10 \\ 90-16t \end{pmatrix}$$

Summe Marktvektor:

$$y = 140-4t^3+\left(-4t^3+40t-10\right)+90-16t = -8t^3+24t+220$$

$$y' = -24t^2+24 = 0 \quad \to \quad |t| = 1$$

$$y'' = -48t \xrightarrow{t=1} y''(1) = -48 < 0 \quad \to \quad \textit{Max bei } t=1$$

$$\vec{y}_{\max} = \begin{pmatrix} 136 & 26 & 74 \end{pmatrix}^T \xrightarrow{\textit{Summe}} \sum_{i=1}^{3} y_i = 236$$

Kontrolle Randwerte des Intervalls:

$$\vec{y}(t=0,5) = \begin{pmatrix} 139,5 \\ 9,5 \\ 82 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textit{Summe}} \sum_{i=1}^{3} y_i = 231 \quad \textit{und} \quad \vec{y}(t=3) = \begin{pmatrix} 32 \\ 2 \\ 42 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textit{Summe}} \sum_{i=1}^{3} y_i = 76$$

(4) Simplexalgorithmus: Lineare Optimierung

Cocktails:

- Daiquiri (45 ml weißer Rum, 30 ml Cointreau, 30 ml Zitronensaft, 15 ml Zuckersirup, Eis), 5.50 Euro
- Kamikaze (30 ml Wodka, 30 ml Cointreau, 30 ml Zitronensaft, 1 Schuß Limonensirup, Eis), 4.50 Euro
- Long Island Ice Tea (20 ml Wodka, 20 ml weißer Rum, 20 ml Gin, 20 ml Cointreau, 4 TL Zitronensaft, 4 TL Orangensaft, 1/8 l Cola, 1 Orangenscheibe, Eis), 7.00 Euro

Vorhandene Spirituosen: 5 l weißer Rum, 6 l Cointreau, 4 l Wodka und 3 l Gin

Welche Cocktails muß der Barkeeper mixen, um möglichst viel Geld einzunehmen?

=> Bestimmen Sie die Lösung rechnerisch.

Variablen:
x_1: Anzahl Daiquiris
x_2: Anzahl Kamikazes
x_3: Anzahl Long Island Ice Teas

Zielfunktion: Maximiere die Einnahmen:

$$\max 5.50x_1 + 4.50x_2 + 7.00x_3$$

Nebenbedingungen:

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{Weißer Rum:} & 45x_1 & & & + & 20x_3 & \leq & 5000 \\
\text{Cointreau:} & 30x_1 & + & 30x_2 & + & 20x_3 & \leq & 6000 \\
\text{Gin:} & & & & & 20x_3 & \leq & 3000 \\
\text{Wodka:} & & & 30x_2 & + & 20x_3 & \leq & 4000
\end{array}$$

Zur Kontrolle: $\quad$ **$x_1 = 44{,}44$** $\quad$ **$x_2 = 33{,}33$** $\quad$ **$x_3 = 150$**

(5) Differentialrechnung: Extrema ohne und mit Nebenbedingungen

<u>Teil 1:</u> Extrema ohne Nebenbedingungen

Ermitteln Sie die stationären Stellen der Funktion $f(x,y,z) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{3}y^3 - 4y^2 + \frac{1}{4}(z-2)^3$

und untersuchen Sie diese Stellen auf ihre Extremwerteigenschaft und berechnen Sie die Extremwerte.

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{3}y^3 - 4y^2 + \frac{1}{4}(z-2)^3$$
$$f_x(x,y,z) = \frac{3}{2}x^2 - 4x = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0 \quad und \quad x_2 = \frac{8}{3}$$
$$f_y(x,y,z) = y^2 - 8y = 0 \quad \rightarrow \quad y_1 = 0 \quad und \quad y_2 = 8$$
$$f_z(x,y,z) = \frac{3}{4}(z-2)^2 \cdot 1 = 0 \quad \rightarrow \quad z = 2[doppelt]$$

Stationäre Stellen:

$$S_1(0 \mid 0 \mid 2 \mid f_1) \quad S_2(0 \mid 8 \mid 2 \mid f_2) \quad S_3\left(\frac{8}{3} \,\middle|\, 0 \,\middle|\, 2 \,\middle|\, f_3\right) \quad S_4\left(\frac{8}{3} \,\middle|\, 8 \,\middle|\, 2 \,\middle|\, f_4\right)$$

$$Hesse-Matrix: \quad H(f) = \begin{pmatrix} 3x-4 & 0 & 0 \\ 0 & 2y-8 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2}(z-2) \end{pmatrix}$$

Aufgrund der doppelten Lösung z = 2 gibt es keine Extrema, da die Auswertung der Hesse-Matrix immer eine semidefinite Lösung ergibt.

<u>Teil 2:</u> Extrema ohne Nebenbedingungen

Ermitteln Sie die stationären Stellen der Funktion $f(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{9}{y} + x - y$

und untersuchen Sie diese Stellen auf ihre Extremwerteigenschaft und
berechnen Sie die Extremwerte.
Warum ist der Funktionswert des Maximums kleiner als der Funktionswert des Minimums?

$$f(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{9}{y} + x - y$$

$$f_x(x,y) = -\frac{1}{x^2} + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \pm 1$$

$$f_y(x,y) = \frac{9}{y^2} - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad y = \pm 3$$

$$S_1(1 \mid 3 \mid f_1) \quad S_2(-1 \mid 3 \mid f_2) \quad S_3(1 \mid -3 \mid f_3) \quad S_4(-1 \mid -3 \mid f_4)$$

$$Hesse-Matrix: \quad H(f) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & 0 \\ 0 & -\frac{18}{y^3} \end{pmatrix}$$

$Auswertung:$

$$H_{S_1}(f) = \begin{pmatrix} \frac{2}{1} & 0 \\ 0 & -\frac{18}{27} \end{pmatrix} \rightarrow \det(H) < 0 \rightarrow \begin{matrix} indefinit \\ Sattelpunkt \end{matrix}$$

$$H_{S_2}(f) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{1} & 0 \\ 0 & -\frac{18}{27} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} f_{xx} = -2 < 0 \\ \det(H) = \frac{36}{27} > 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} negativ\ definit \\ Max(-1 \mid 3 \mid -8) \end{matrix}$$

$$H_{S_3}(f) = \begin{pmatrix} \frac{2}{1} & 0 \\ 0 & \frac{18}{27} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} f_{xx} = 2 > 0 \\ \det(H) = \frac{36}{27} > 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} positiv\ definit \\ Min(1 \mid -3 \mid 8) \end{matrix}$$

$$H_{S_1}(f) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{1} & 0 \\ 0 & \frac{18}{27} \end{pmatrix} \rightarrow \det(H) < 0 \rightarrow \begin{matrix} indefinit \\ Sattelpunkt \end{matrix}$$

Da es sich um eine gebrochen-rationale Funktion mit Pol- bzw. Unendlichkeitsstellen handelt, ist das Maximum kleiner als das Minimum.

Teil 3: Optimum mit Nebenbedingungen

Gegeben sei folgende Produktionsfunktion: $f(x,y) \;=\; 2x^{0,6}\cdot y^{0,4}$

Die Mengeneinheit für x kostet 8,00 €, der Preis für eine Mengeneinheit von y liegt bei 6,50 €.

Insgesamt stehen uns 10.000,00 € zur Verfügung.

Wie viel kann man unter den gegebenen Bedingungen produzieren?

a) Lösen Sie das Problem mittels Lagrangemethode.

b) Welchen Wert besitzt der Lagrangeparameter im Maximumfall und welche ökonomische Aussage kann hier getroffen werden.

$$L(x,y,\lambda) \;=\; 2x^{0,6}\cdot y^{0,4}+\lambda\cdot(10.000-8x-6{,}5y)$$

$$L_x(x,y,\lambda) \;=\; 1{,}2\cdot\frac{y^{0,4}}{x^{0,4}}-8\lambda=0 \;\rightarrow\; \lambda=\frac{1{,}2}{8}\cdot\frac{y^{0,4}}{x^{0,4}}$$

$$L_y(x,y,\lambda) \;=\; 0{,}8\cdot\frac{x^{0,6}}{y^{0,6}}-6{,}5\lambda=0 \;\rightarrow\; \lambda=\frac{0{,}8}{6{,}5}\cdot\frac{x^{0,6}}{y^{0,6}}$$

$$\frac{1{,}2}{8}\cdot\frac{y^{0,4}}{x^{0,4}}=\frac{0{,}8}{6{,}5}\cdot\frac{x^{0,6}}{y^{0,6}} \;\rightarrow\; y \;=\; \frac{6{,}4}{7{,}8}x \;=\; \frac{32}{39}x$$

$$L_\lambda(x,y,\lambda) \;=\; 10.000-8x-6{,}5y=0 \;\rightarrow\; 10.000=8x+6{,}5y$$

$$\xrightarrow{y\;=\;\frac{32}{39}x} 10.000=8x+6{,}5\cdot\frac{32}{39}x \;\rightarrow\; 10.000=\frac{40}{3}x \;\rightarrow\; x=750 \xrightarrow{y\;=\;\frac{32}{39}x} y=615{,}38$$

$$f(750/615{,}38) \;=\; 2\cdot 750^{0,6}\cdot 615{,}38^{0,4} \;\approx\; 1.385{,}87 \quad \textit{oder}$$

$$f\left(750/\frac{32}{39}\cdot 750\right) \;=\; 2\cdot 750^{0,6}\cdot\left(\frac{32}{39}\cdot 750\right)^{0,4} \;=\; 2\cdot\left(\frac{32}{39}\right)^{0,4}\cdot 750 \;\approx\; 1.385{,}87$$

Wert und Aussage zu Lagrangeparameter λ:

Wert für λ

$$\lambda=\frac{1{,}2}{8}\cdot\frac{\left(\frac{32}{39}\cdot 750\right)^{0,4}}{750^{0,4}}=\frac{1{,}2}{8}\cdot\left(\frac{32}{39}\right)^{0,4}=0{,}13859$$

Aussage

Erhöhung Budget um 100 GE: $10.100\left[\text{Budget}(\text{neu})\right]$

$\rightarrow\; 100\cdot 0{,}13859 \;=\; 13{,}859 \;\approx\; 13{,}86$

$\rightarrow$ Erhöhung des Produktionsergebnisses auf 1.385,87+13,86 = 1.399,73

Nachweis:

$$10.100=\frac{40}{3}x \;\rightarrow\; 757{,}5=x \xrightarrow{y\;=\;\frac{32}{39}x} y=621{,}54$$

$$f(757{,}5/615{,}38) \;=\; 2\cdot 757{,}5^{0,6}\cdot 615{,}38^{0,4} \;\approx\; 1.399{,}73 \quad \textit{oder}$$

$$f\left(757{,}5/\frac{32}{39}\cdot 757{,}5\right) \;=\; 2\cdot 757{,}5^{0,6}\cdot\left(\frac{32}{39}\cdot 757{,}5\right)^{0,4} \;=\; 2\cdot\left(\frac{32}{39}\right)^{0,4}\cdot 757{,}5 \;\approx\; 1.399{,}73$$

$$\textit{Unterschied}:\; 1.399{,}73-1.385{,}87 \;=\; 13{,}86$$

(6) Deskriptive Statistik I:

Häufigkeitsverteilung / Mittelwerte / Streumaße / Konzentrationsprozess

Im Frachthafen Mannheim werden im Laufe eines Monats mehrere Frachtschiffe beladen. Die Größe der Schiffe wird durch ihre Ladekapazität (in Tonnen) angegeben. Im Laufe des Monats Mai werden die in der Tabelle angegebenen Werte ermittelt, wobei eine Klasseneinteilung gewählt wird.
Nehmen Sie Gleichverteilung in den einzelnen Klassen an.

Gewicht (to)	absolute Häufig.	relative Häufig.	Klassen-mitte	Klassen-breite	Häufigkeits-dichte	kum. rel. Häufig.
[0 ; 500[	30					
[500 ; 1.000[	60					
[1.000 ; 2.000[	70					
[2.000 ; 3.000[	30					
[3.000 ; 5.000[	10					
Summe						

a) Vervollständigen Sie die Tabelle.
b) Zeichnen Sie das zugehörige Histogramm.
c) Bestimmen Sie den arithmetischen Mittelwert, die modale Klasse und den Modalwert.
d) Bestimmen Sie den Median, das untere Quartil und das obere Quartil.
e) Zeichnen Sie nun noch die Lorenzkurve und berechnen Sie den zugehörigen Ginikoeffizienten. Beurteilen Sie auch kurz Ihr Ergebnis.

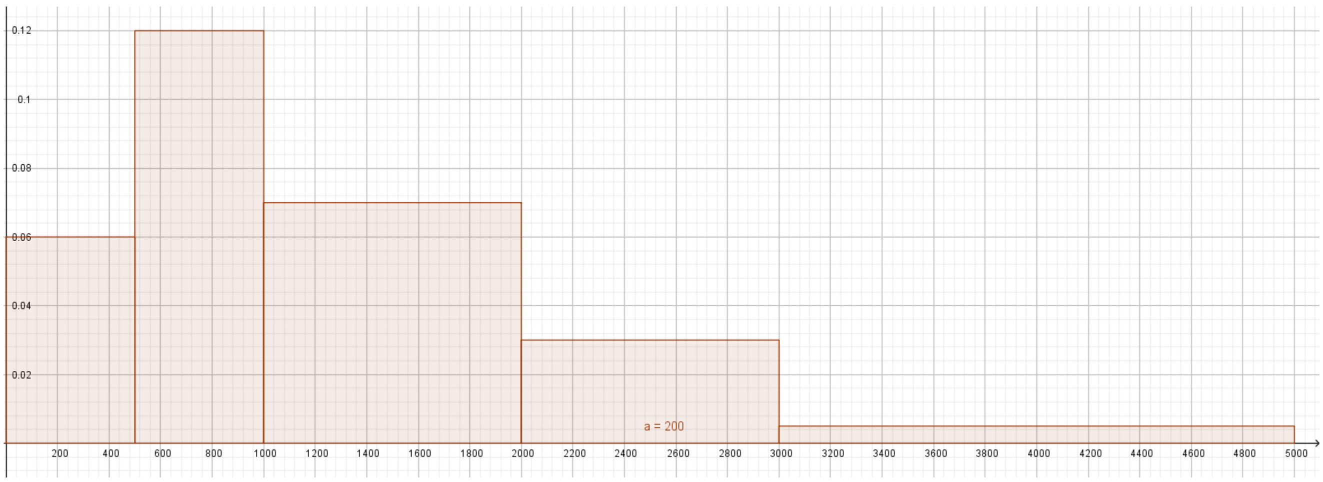
Klasse	Grenzen	abs. H'keit	rel. H'keit	Klassen-mitte	Klassen-breite	HDI	kum. rel. H'keit
1	[0 ; 500[	30	0,15	250	500	0,06	0,15
2	[500 ; 1.000[	60	0,3	750	500	0,12	0,45
3	[1.000 ; 2.000[	70	0,35	1500	1000	0,07	0,8
4	[2.000 ; 3.000[	30	0,15	2500	1000	0,03	0,95
5	[3.000 ; 5.000]	10	0,05	4000	2000	0,005	1
	Summe	200	1		5000		

arithmet. Mittel:	1.362,50		Varianz	846.718,75
			Std.Abw.	920,17

Moale Klasse:	[500 ; 1.000[
Modus:	750

Median	1.142,85714
Quartil 1	666,66667
Quartil 3	1.857,14286

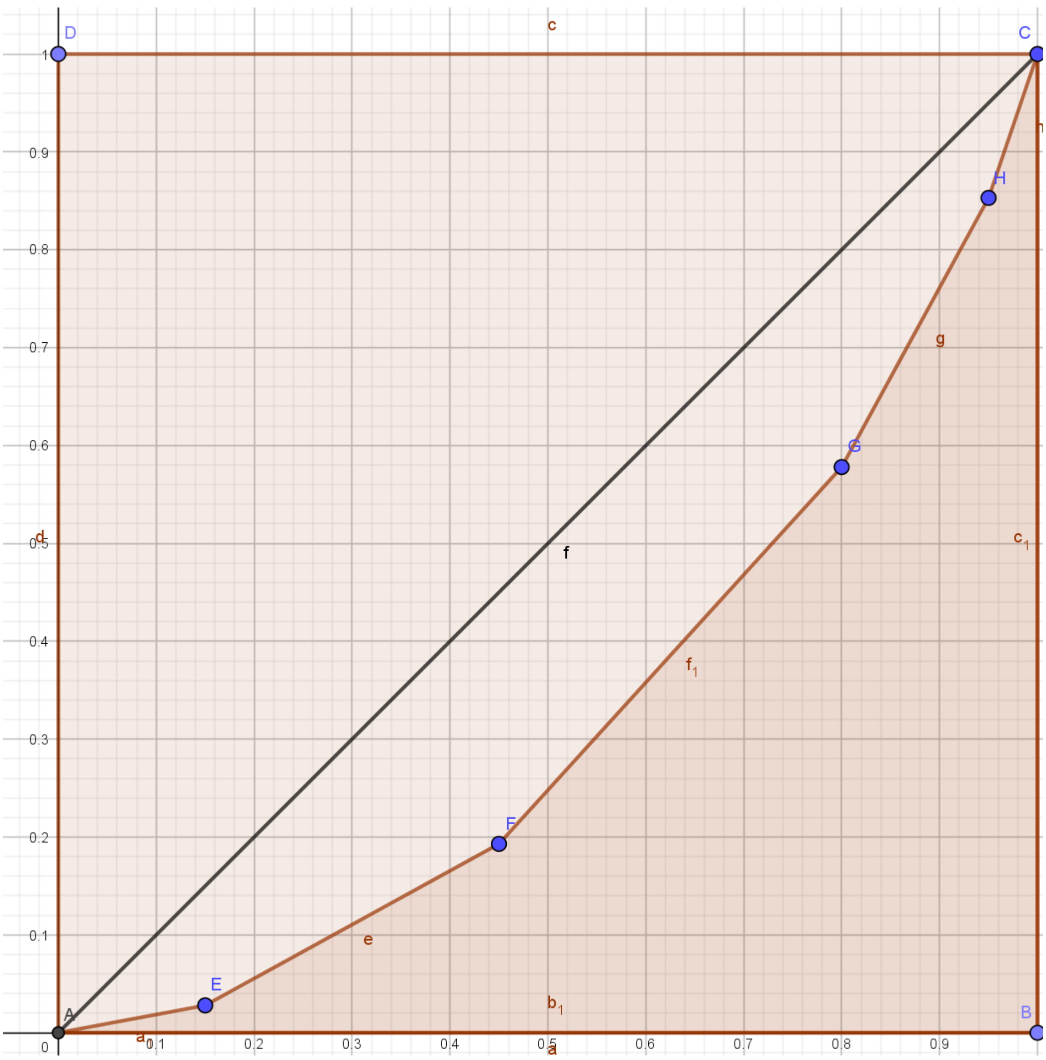
Histogramm:



Ginikoeffizient und Lorenzkurve:

Anzahl			Ladegewicht			
abs. H'keit	rel. H'keit	kum. rel. H'keit	Einzel-ge-wicht	Gewicht pro Klasse	rel. H'keit	kum. rel. H'keit
30	0,15	0,15	250	7.500	0,028	0,028
60	0,3	0,45	750	45.000	0,165	0,193
70	0,35	0,8	1.500	105.000	0,385	0,578
30	0,15	0,95	2.500	75.000	0,275	0,853
10	0,05	1	4.000	40.000	0,147	1,000
200	1			272.500	1	

Fläche unter der Lorenz-kurve:		**0,32**
Konzentrationsfläche:		**0,18**
Ginikoeffizient:		**0,36**
norm. Gini-Koeff:		**0,3618**



(7) Deskriptive Statistik II: Korrelations- & Regressionsanalyse

Ein Mathematiklehrer möchte untersuchen, wie sich der Lernaufwand seiner Schüler auf die Punkte bei der Mathematikschularbeit auswirkt. Dabei erhebt er bei 13 Schülern folgende Daten (Lernaufwand in Stunden):

Lernaufwand	18	4	12	10	23	10	8	17	13	16	13	7	14
Punkte bei SA	29	5	19	21	26	28	16	19	14	30	18	3	11

(a) Zu welchem Schluss kommt er anhand der Daten?

(b) Welche Punktzahl ist zu erwarten bei einer Lernzeit von 15 Stunden?

(c) Wie lange muss man für 25 Punkte lernen?

Schüler	Lernaufwand	Punkte
1	18	29
2	4	5
3	12	19
4	10	21
5	23	26
6	10	28
7	8	16
8	17	19
9	13	14
10	16	30
11	13	18
12	7	3
13	14	11

Regressionsgerade: $f(x) = 1{,}1151x + 4{,}2314$

$$f(15) = 1{,}1151 \cdot 15 + 4{,}2314$$
$$f(15) = 20{,}96\,[Punkte]$$

$$25 = 1{,}1151x + 4{,}2314$$
$$\rightarrow \quad x = \frac{25 - 4{,}2314}{1{,}1151} = 18{,}6\,[Stunden]$$

Steigung		**1,1151**
y-Achsenabschnitt		**4,2314**
Korrelation		**0,6549**