

Übung Klausuraufgaben (03.06.2024)

(1) Matrizen und Vektoren:

Übergangsmatrizen & Statisches Gleichgewicht

„Horch“ ist einer der weltgrößten Automobilhersteller. Bei Firmenkunden ist besonders das Luxusmodell „H-Hurtig“ gefragt. Dieses wird wahlweise mit Kraftstoff- oder Erdgasantrieb angeboten. Die meisten Kunden leasen ein Fahrzeug für jeweils ein Jahr und wechseln anschließend auf ein neueres Modell. Dabei kann die Antriebstechnik immer wieder neu zwischen den Varianten Benzin, Diesel und Erdgas gewählt werden.

Die bisherigen Kunden eines Benzinmodells wählen zu 60 % beim nächsten Fahrzeug wieder ein Benzinmodell, 15 % wechseln zur Dieselvariante. Von den bisherigen Dieselfahrern bleiben 75 % bei dieser Technik, 5 % testen den Erdgasantrieb.

Erdgasfans bleiben aus Umweltschutzgründen zu 80 % ihrer vorherigen Wahl treu, 15 % entscheiden sich für Benzin, der Rest wählt Diesel.

Im Jahr 2018 konnte man folgende Verteilung der einzelnen Antriebsarten

feststellen: Benzin: 28 % Diesel: 60 % Erdgas: 12 %

- 1.) Erstellen Sie die Übergangsmatrix.
- 2.) Welche Anteile sind 2019 zu erwarten?
- 3.) Wie waren die Anteile im Jahr 2017?
- 4.) Die Produktion der Fahrzeuge mit Erdgasantrieb ist nur rentabel, wenn langfristig ein Anteil von ca. 30 % erreicht werden kann.
Untersuchen Sie, ob dies bei gleichbleibendem Wechselverhalten zu erwarten ist.

(2) Simplexalgorithmus und Lineare Optimierung

Eine Firma, die Mountainbikes herstellt, möchte zwei neue Modelle auf den Markt bringen. Zur Herstellung und Lagerung dieser Fahrräder werden Maschinenstunden (assembly time), Arbeitsstunden (inspection time) und Lagerraum (storage space) benötigt. Wie viele Stück der beiden Mountainbike-Modelle sollen unter Berücksichtigung der zur Verfügung stehenden Ressourcen produziert werden um den Gewinn zu maximieren? Das Management der Firma geht davon aus, dass alle produzierten Stück abgesetzt werden können.

	Modell 1	Modell 2	max. Ressourcen
Maschinenstunden pro Stück	4	10	100
Arbeitsstunden pro Stück	2	1	22
Lagerraum pro Stück (in kubischen Fuß)	3	3	39
Gewinn pro Stück (in US\$)	60	50	

(1 Fuß entspricht 30,48 cm)

- a) Formulieren Sie das Problem als lineares Programm.
- b) Ermitteln Sie die grafische Lösung.
- c) Lösen Sie das Problem durch Schnitt der bindenden Nebenbedingungen.

(3) Differentialrechnung: Extrema ohne und mit Nebenbedingungen

Teil 1:

Extrema ohne Nebenbedingungen

Ermitteln Sie die stationären Stellen der Funktion

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{3}y^3 - 4y^2 + \frac{1}{4}z \cdot e^{-z^2}$$

und untersuchen Sie diese Stellen auf ihre Extremwerteigenschaft und berechnen Sie die Extremwerte.

Teil 2:

Extrema ohne Nebenbedingungen

Ermitteln Sie die stationären Stellen der Funktion

$$f(x, y) = \frac{1}{x} - \frac{9}{y} + x - y$$

und untersuchen Sie diese Stellen auf ihre Extremwerteigenschaft und berechnen Sie die Extremwerte.

Warum ist der Funktionswert des Maximums kleiner als der Funktionswert des Minimums?

Teil 3:

Optimum mit Nebenbedingungen

Gegeben sei folgende Produktionsfunktion:

$$f(x, y) = 2x^{0,6} \cdot y^{0,4}$$

Die Mengeneinheit für x kostet 8,00 €, der Preis für eine Mengeneinheit von y liegt bei 6,50 €.

Insgesamt stehen uns 10.000,00 € zur Verfügung.

Wie viel kann man unter den gegebenen Bedingungen produzieren?

- Lösen Sie das Problem mittels Lagrangemethode.
- Welchen Wert besitzt der Lagrangeparameter im Maximumfall und welche ökonomische Aussage kann hier getroffen werden.

(4) Deskriptive Statistik I: Häufigkeitsverteilung / Mittelwerte / Streumaße / Konzentrationsprozess

Im Frachthafen Mannheim werden im Laufe eines Monats mehrere Frachtschiffe beladen. Die Größe der Schiffe wird durch ihre Ladekapazität (in Tonnen) angegeben. Im Laufe des Monats Mai werden die in der Tabelle angegebenen Werte ermittelt, wobei eine Klasseneinteilung gewählt wird. Nehmen Sie Gleichverteilung in den einzelnen Klassen an.

Gewicht (to)	absolute Häufig.	relative Häufig.	Klassenmitte	Klassenbreite	Häufigkeitsdichte	kum. rel. Häufig.
[0 ; 500[30					
[500 ; 1.000[60					
[1.000 ; 2.000[70					
[2.000 ; 3.000[30					
[3.000 ; 5.000[10					
Summe						

- Vervollständigen Sie die Tabelle.
- Zeichnen Sie das zugehörige Histogramm.
- Bestimmen Sie den arithmetischen Mittelwert, die modale Klasse und den Modalwert.
- Bestimmen Sie den Median, das untere Quartil und das obere Quartil.
- Zeichnen Sie nun noch die Lorenzkurve und berechnen Sie den zugehörigen Ginikoeffizienten. Beurteilen Sie auch kurz Ihr Ergebnis.

(5) Deskriptive Statistik II: Korrelations- & Regressionsanalyse

Ein Mathematiklehrer möchte untersuchen, wie sich der Lernaufwand seiner Schüler auf die Punkte bei der Mathematikschularbeit auswirkt. Dabei erhebt er bei 13 Schülern folgende Daten (Lernaufwand in Stunden):

Lernaufwand	18	4	12	10	23	10	8	17	13	16	13	7	14
Punkte bei SA	29	5	19	21	26	28	16	19	14	30	18	3	11

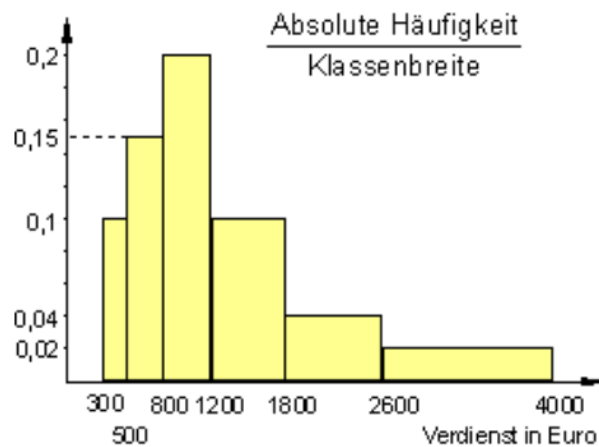
- Zu welchem Schluss kommt er anhand der Daten?
- Welche Punktzahl ist zu erwarten bei einer Lernzeit von 15 Stunden?
- Wie lange muss man für 25 Punkte lernen?

(6) Deskriptive Statistik III: Häufigkeitsverteilung und Analyse Histogramm

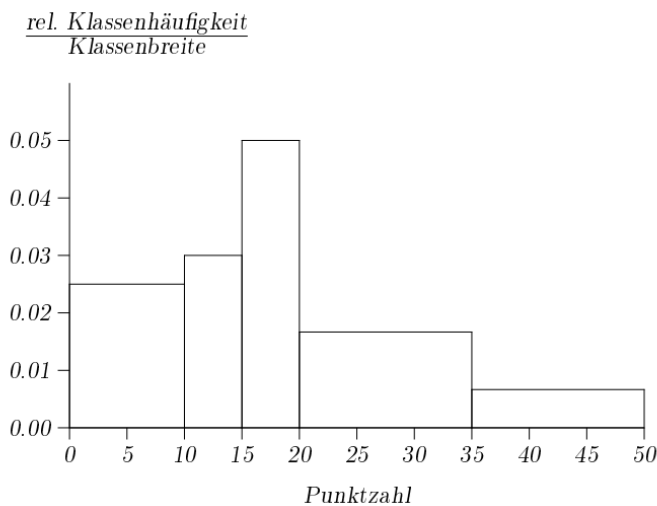
Teil A:

Das Histogramm beschreibt die Verteilung der Beschäftigten eines Industriezweigs nach ihrem Monatsverdienst.

- a) Erstellen Sie die zugehörige Häufigkeitstabelle.
- b) Wie groß ist der Durchschnittsverdienst eines Beschäftigten.
- c) Bilden Sie hieraus die Lorenzkurve.



Teil B:



- a) Bestimmen Sie anhand des Histogramms das arithmetische Mittel, den Modalwert und den Median.
- b) Ermitteln Sie zudem die Standardabweichung und die Quartilwerte.

(7) Deskriptive Statistik IV: Lorenzkurve und Gini-Koeffizient

Die Firma CelebWedCake liefert zu einem Festpreis von 200.000 € eine exklusive Premium-Hochzeitstorte an Prominente. In den letzten 5 Jahren wurden insgesamt 20 von diesen Torten verkauft. Pro Kunde ist die Anzahl der verkauften Torten in dieser Zeitspanne mittels der verschiedenen Ausprägungen a_i und den zugehörigen absoluten Häufigkeiten h_i erfasst:

i	1	2	3	4
a_i	1	2	4	5
h_i	5	3	1	h_4

- Bestimmen Sie h_4 .
- Zeichnen Sie die Lorenzkurve,
- berechnen Sie den normierten Gini-Koeffizienten