

Klausur Wirtschaftsmathematik

Fakultät für Technik

Studiengang: Integrated Engineering

Datum: 02.06.2025

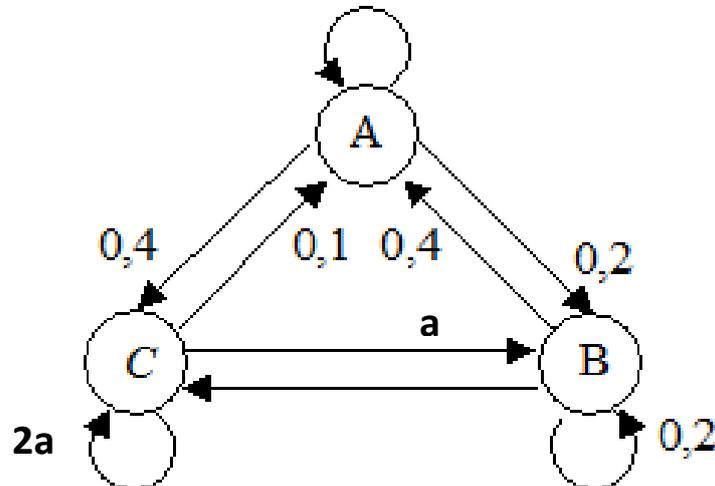
Matrikelnummer:		Dozent: Jürgen Meisel	
Kurs: TIE 23 EN	Semester:	4	
Hilfsmittel: <i>Wiss. TR (nicht programmierbar) und Formelsammlung</i>		Bearbeitungszeit: 90 min.	
Bewertung:	Maximale Punktzahl: 90	Erreichte Punktzahl:	
Prozente:	Signum:	
Anmerkungen:	Von 8 gestellten Aufgaben müssen 6 ausgewählt und bearbeitet werden.		

Aufgabennummer	maximale Punkte	erreichte Punkte	Bemerkungen
A 1: Übergangsmatrizen und stat. Gleichgewicht	15		
A 2: Diff.-Rg I (Extrema mit NB)	15		
A 3: Diff.-Rg II (Extrema ohne NB)	15		
A 4: Lineare Optimierung	15		
A 5: Statistik I - Mittelwerte & Streumaße (klassiert)	15		
A 6: Statistik II - Mittelwerte & Streumaße (diskret / Einzelwerte)	15		
A 7: Statistik III – Gini-Koeffizient & Lorenzkurve	15		
A 8: Statistik IV – Regression und Korrelation & Warenkorbmethode mit Preisindizes	15		
Summe	90		

Klausur QR-Methoden

(1) Matrizen und Vektoren: Übergangsmatrizen & Statisches Gleichgewicht

Zwischen drei Regionen A, B und C findet ein Bevölkerungsaustausch durch Umzüge statt. Das Diagramm zeigt diesen Austausch in Anteilen innerhalb eines Jahres.



Die Einwohnerzahlen in Tausend betragen 2025 zu Beginn der Modellierung:

Region A: 200.000

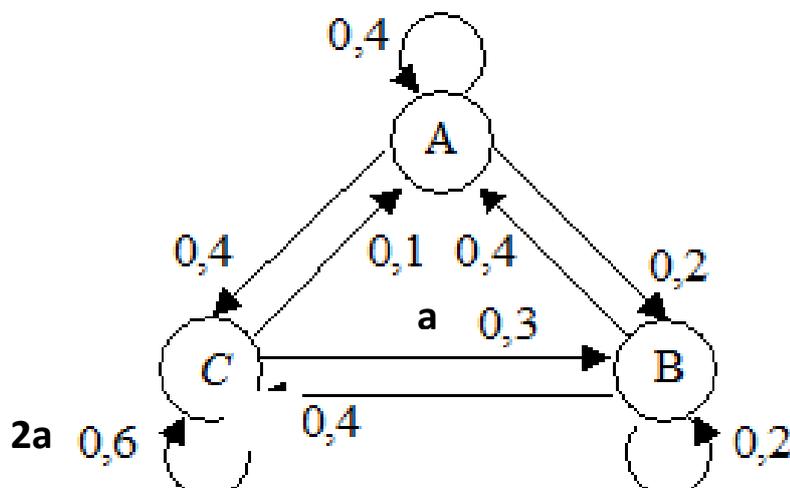
Region B: 150.000

Region C: 50.000

a) Bilden Sie die Übergangsmatrix und den Verteilungsvektor.

Lösung:

$$U = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \quad \vec{p}_{2025} = \begin{pmatrix} 0,500 \\ 0,375 \\ 0,125 \end{pmatrix}$$



- b) Wie wird sich die Verteilung der Bevölkerung in den kommenden beiden Jahren (2026 – 2027) entwickeln?

Lösung:

$$\vec{p}_{2026} = U \cdot \begin{pmatrix} 0,500 \\ 0,375 \\ 0,125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3625 \\ 0,2125 \\ 0,4250 \end{pmatrix} \quad \vec{p}_{2027} = U \cdot \begin{pmatrix} 0,3625 \\ 0,2125 \\ 0,4250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2725 \\ 0,2425 \\ 0,4850 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}_{2026} = U \cdot \begin{pmatrix} 200.000 \\ 150.000 \\ 50.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 145.000 \\ 85.000 \\ 170.000 \end{pmatrix} \quad \vec{p}_{2027} = U \cdot \begin{pmatrix} 145.000 \\ 85.000 \\ 170.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 109.000 \\ 97.000 \\ 194.000 \end{pmatrix}$$

- c) Bestimmen Sie das statische Gleichgewicht zu dieser Situation.

Lösung:

$$(U - E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \xrightarrow{x+y+z=1} \begin{pmatrix} -0,6 & 0,4 & 0,1 \\ 0,2 & -0,8 & 0,3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,25 \\ 0,50 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100.000 \\ 100.000 \\ 200.000 \end{pmatrix}$$

(2) Differentialrechnung I: Extrema mit Nebenbedingung

Gegeben sei folgende Produktionsfunktion: $f(x, y) = 6 \cdot x^{0,2} \cdot y^{0,8}$

Eine Mengeneinheit für x kostet **k** GE, der Preis für eine Mengeneinheit von y liegt bei **1,5k** GE mit $k > 0$.

Insgesamt steht ein Budget von **b = 4.500** GE zur Verfügung.

- a) Bestimmen Sie das optimale Produktionsprogramm mit Hilfe des Lagrangeansatzes in Abhängigkeit von k.

Lösung:

$$L(x, y, \lambda) = 6 \cdot x^{0,2} \cdot y^{0,8} + \lambda(4.500 - kx - 1,5ky)$$

$$L_x(x, y, \lambda) = 1,2 \cdot \frac{y^{0,8}}{x^{0,8}} - k\lambda = 0 \rightarrow \lambda = \frac{1,2}{k} \cdot \frac{y^{0,8}}{x^{0,8}}$$

$$L_y(x, y, \lambda) = 4,8 \cdot \frac{x^{0,2}}{y^{0,2}} - 1,5k\lambda = 0 \rightarrow \lambda = \frac{4,8}{1,5k} \cdot \frac{x^{0,2}}{y^{0,2}}$$

$$\text{Austauschverhältnis: } \frac{1,2}{k} \cdot \frac{y^{0,8}}{x^{0,8}} = \frac{4,8}{1,5k} \cdot \frac{x^{0,2}}{y^{0,2}} \rightarrow y = \frac{8}{3} \cdot x$$

$$\xrightarrow{\text{mittels NB}} 4.500 = kx + 1,5ky \rightarrow 4.500 = kx + 1,5k \cdot \frac{8}{3} \cdot x \rightarrow 4.500 = kx + 4k \cdot x$$

$$\rightarrow 4.500 = 5k \cdot x \rightarrow x = \frac{900}{k} \rightarrow y = \frac{900}{k} \cdot \frac{8}{3} = \frac{2400}{k}$$

- b) Die Produktionsmenge von x soll im Intervall [450 ; 1.800] liegen. Ermitteln Sie daraus den Wertebereich für k und bestimmen Sie den Produktionsbereich für y.

Lösung:

$$\left. \begin{array}{l} \rightarrow x_1 = \frac{900}{k} = 450 \rightarrow k_1 = 2 \\ \text{und } x_2 = \frac{900}{k} = 1800 \rightarrow k_2 = 0,5 \end{array} \right\} \rightarrow k \in [0,5 ; 2] \xrightarrow{y = \frac{2400}{k}} y \in [1.200 ; 4.800]$$

- c) Welchen Wert besitzt der Lagrangeparameter λ im Maximumfall und welche ökonomische Aussage kann hier getroffen werden, wenn sich das Budget b um **100** GE erhöht?

Anmerkung: Auf einen Nachweis des Maximums kann hier verzichtet werden!

Lösung:

$$\rightarrow \lambda = \frac{1,2}{k} \cdot \frac{y^{0,8}}{x^{0,8}} = \frac{1,2}{k} \cdot \frac{\left(\frac{8}{3}x\right)^{0,8}}{x^{0,8}} = \frac{1,2}{k} \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^{0,8} = \frac{2,63}{k}$$

$$\xrightarrow[\text{+100}]{\text{Budget}} \Delta f = 100 \cdot \lambda = 100 \cdot \frac{2,63}{k} = \frac{263}{k} [\text{Produktionszuwachs}]$$

(3) Differentialrechnung II: Extrema ohne Nebenbedingungen

Gegeben sei folgende Funktion:

$$f(x, y, z) = 200 + \frac{1}{2}x^2y - 2y^2 - 2x^2 - 3z^2 + 4xy + \sqrt{8,25} \cdot xz$$

- Zeigen Sie, dass nur drei stationäre Stellen vorliegen.
- Prüfen Sie die stationären Stellen auf Extremwerteigenschaft.

Lösung:

$$f(x, y, z) = 200 + \frac{1}{2}x^2y - 2y^2 - 2x^2 - 3z^2 + 4xy + \sqrt{8,25} \cdot xz$$

$$f_x(x, y, z) = xy - 4x + 4y + \sqrt{8,25} \cdot z = 0$$

$$f_y(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 - 4y + 4x = 0 \rightarrow y = \frac{1}{8}x^2 + x$$

$$f_z(x, y, z) = -6z + \sqrt{8,25} \cdot x = 0 \rightarrow z = \frac{\sqrt{8,25}}{6} \cdot x$$

$$\xrightarrow{\text{in } f_x} x \cdot \left(\frac{1}{8}x^2 + x\right) - 4x + 4 \cdot \left(\frac{1}{8}x^2 + x\right) + \sqrt{8,25} \cdot \frac{\sqrt{8,25}}{6} \cdot x = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{8}x^3 + x^2 - 4x + \frac{1}{2}x^2 + 4x + \frac{8,25}{6} \cdot x = 0 \rightarrow x \cdot \left(\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{11}{8}\right) = 0$$

$$\rightarrow x = 0 \quad \vee \quad x^2 + 12x + 11 = 0$$

$$\text{oder} \rightarrow x_{2/3} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 44}}{2} = \frac{-12 \pm 10}{2} \rightarrow x_2 = -1 \quad \vee \quad x_3 = -11$$

Stationäre Stellen:

$$S_1(0 \mid 0 \mid 0 \mid f_1) \quad S_2\left(-1 \mid -\frac{7}{8} \mid -\frac{\sqrt{33}}{12} \mid f_2\right) \quad S_3\left(-11 \mid \frac{33}{8} \mid -\frac{11 \cdot \sqrt{33}}{12} \mid f_3\right) \quad \text{oder}$$

Stationäre Stellen:

$$S_1(0 \mid 0 \mid 0 \mid f_1) \quad S_2(-1 \mid -0,875 \mid -0,4787 \mid f_2) \quad S_3(-11 \mid 4,125 \mid -5,2658 \mid f_3)$$

Hesse-Matrix:

$$H(f) = \begin{pmatrix} y-4 & x+4 & \sqrt{8,25} \\ x+4 & -4 & 0 \\ \sqrt{8,25} & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Hesse – Matrix :

$$H(f) = \begin{pmatrix} y-4 & x+4 & \sqrt{8,25} \\ x+4 & -4 & 0 \\ \sqrt{8,25} & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow S_1(0 \mid 0 \mid 0 \mid f_1)$$

$$\rightarrow H(f) = \begin{pmatrix} -4 & 4 & \sqrt{8,25} \\ 4 & -4 & 0 \\ \sqrt{8,25} & 0 & -6 \end{pmatrix} \left. \begin{array}{l} f_{xx} = -4 < 0 \\ \det(H_2) = \det \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} = 0 \\ \det(H_3) = 33 > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{indefinit w/ } \det(H_3) = 33 > 0 \\ \text{kein Extremum} \end{array}$$

$$\rightarrow S_2(-1 \mid -0,875 \mid -0,4787 \mid f_2)$$

$$\rightarrow H(f) = \begin{pmatrix} -4,875 & 3 & \sqrt{8,25} \\ 3 & -4 & 0 \\ \sqrt{8,25} & 0 & -6 \end{pmatrix} \left. \begin{array}{l} f_{xx} = -4,875 < 0 \\ \det(H_2) = \det \begin{pmatrix} -4,875 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} > 0 \\ \det(H_3) = -30 < 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{negativ definit} \\ \text{Maximum} \end{array}$$

$$\rightarrow S_3(-11 \mid 4,125 \mid -5,2658 \mid f_3)$$

$$\rightarrow H(f) = \begin{pmatrix} 0,125 & -7 & \sqrt{8,25} \\ -7 & -4 & 0 \\ \sqrt{8,25} & 0 & -6 \end{pmatrix} \left. \begin{array}{l} f_{xx} = 0,125 > 0 \\ \det(H_2) = \det \begin{pmatrix} 0,125 & -7 \\ -7 & -4 \end{pmatrix} < 0 \\ \det(H_3) = 330 > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{indefinit w/ } \det(H_2) < 0 \\ \text{kein Extremum} \end{array}$$

Option:

$$f(x, y) = 200 + \frac{1}{2}x^2y - 2y^2 - 2x^2 + 4xy$$

Lösung:

$$f(x, y) = 200 + \frac{1}{2}x^2y - 2y^2 - 2x^2 + 4xy$$

$$f_x(x, y) = xy - 4x + 4y = 0$$

$$f_y(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - 4y + 4x = 0 \rightarrow y = \frac{1}{8}x^2 + x$$

$$\xrightarrow{\text{in } f_x} x \cdot \left(\frac{1}{8}x^2 + x\right) - 4x + 4 \cdot \left(\frac{1}{8}x^2 + x\right) = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{8}x^3 + x^2 - 4x + \frac{1}{2}x^2 + 4x = 0 \rightarrow x^2 \cdot \left(\frac{1}{8}x + \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$\rightarrow x = 0[\text{doppelt}] \vee x = -12$$

Stationäre Stellen:

$$S_1(0 \mid 0 \mid f_1) \quad S_2(-12 \mid 6 \mid f_2)$$

Hesse-Matrix:

$$H(f) = \begin{pmatrix} y-4 & x+4 \\ x+4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow S_1(0 \mid 0 \mid f_1) \rightarrow H(f) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} f_{xx} = -4 < 0 \quad \text{negativ definit} \\ \det(H) = 0 \quad \text{Maximum} \end{array}$$

$$\rightarrow S_2(-12 \mid 6 \mid f_2) \rightarrow H(f) = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -8 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} f_{xx} = 2 > 0 \quad \text{indefinit} \\ \det(H) = -72 < 0 \quad \text{kein Extremum} \end{array}$$

(4) Lineare Optimierung

Ein Betrieb stellt auf drei Maschinen verschiedene Produkte her. Die Bearbeitungszeiten in Minuten für die Produkte A und B und deren Verkaufspreise sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

	Produkt A	Produkt B	Kapazität in Minuten
Maschine 1	5	3	120
Maschine 2	3	3	81
Maschine 3	3	6	120

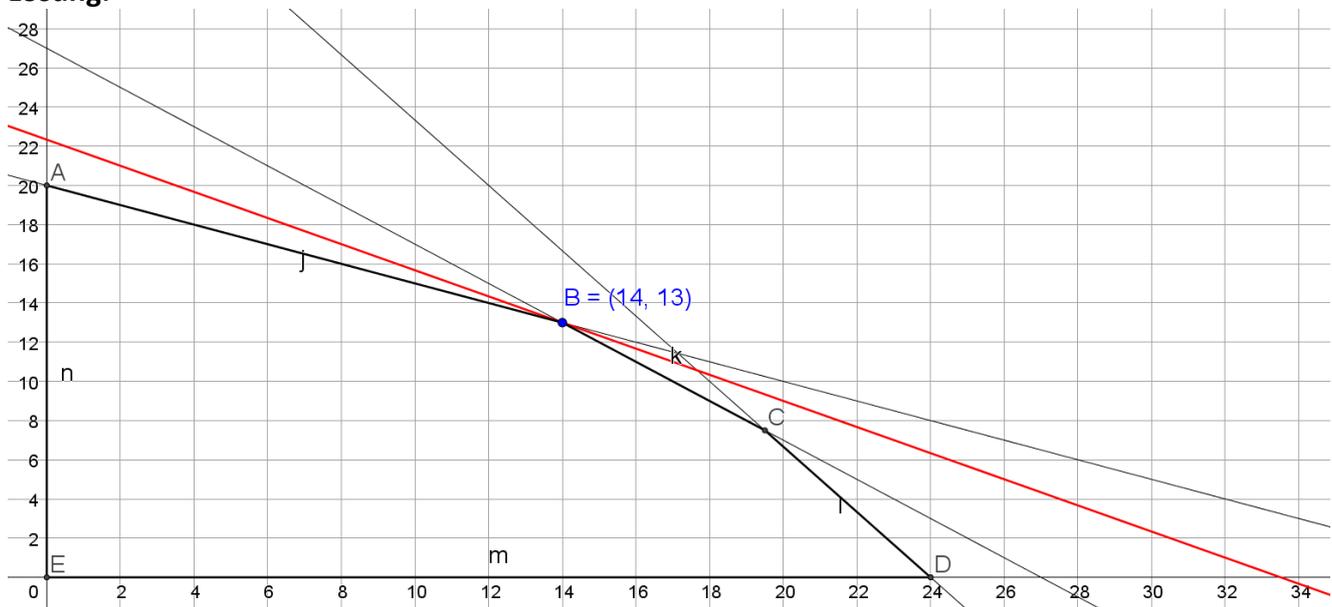
Verkaufspreis Produkt A: 20,00 €

Verkaufspreis Produkt B: 30,00 €

Gesucht ist das umsatzmaximierende Produktionsprogramm.

- a) Stellen mittels graphischer Lösung das optimale Produktionsprogramm dar, bestimmen Sie das Gewinnmaximum und **geben Sie die Lösung an**.

Lösung:



$$G_{\max}(14 / 13) = 20 \cdot 14 + 13 \cdot 30 = 670$$

Unter Anwendung des Simplex-Verfahrens soll das optimale Produktionsprogramm der Unternehmung mit dem Ziel der **Maximierung des Gewinns** bestimmt werden.

Nach einigen Umformungsschritten mittels Simplexalgorithmus gelangen Sie auf **Tableau 1**:

	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
I	3,5	0	1	0	-0,5	60	
II	1,5	0	0	1	-0,5	21	
III	0,5	1	0	0	$\frac{1}{6}$	20	
ZF	5	0	0	0	-5	G - 600	

b) Woran erkennt man bei Tableau 1, dass noch weiter gerechnet werden muss?

Lösung: In der Zeile ZF (Zielfunktion) befindet sich noch eine positive Zahl.

c) Bestimmen Sie das Pivot-Element von Tableau 1. Erklären Sie dabei Ihre Vorgehensweise.

Lösung:

- ⇒ **Pivotspalte x_1 wegen positiven ZF-Wert**
- ⇒ **Division der Werte der Ergebnisspalte b mit den Koeffizienten in der Pivotspalte**
- ⇒ **Wahl des kleinsten Quotienten wegen Restriktion**

d) Erstellen Sie nun ausgehend von **Tableau 1** das Endtableau, geben Sie die vollständige Lösung an.

	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
I	3,5	0	1	0	-0,5	60	
II	1,5	0	0	1	-0,5	21	
III	0,5	1	0	0	$\frac{1}{6}$	20	
ZF	5	0	0	0	-5	G - 600	
I	3,5	0	1	0	-0,5	60	$60/3,5 = 120/7$
II	1,5	0	0	1	-0,5	21	$21/1,5 = 14 \Rightarrow \text{ii}/1,5$
III	0,5	1	0	0	$\frac{1}{6}$	20	$20/0,5 = 40$
ZF	5	0	0	0	-5	G - 600	
I	3,5	0	1	0	-0,5	60	$i - 3,5ii$
II	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	14	
III	0,5	1	0	0	$\frac{1}{6}$	20	$iii - 0,5ii$
ZF	5	0	0	0	-5	G - 600	ZF - 5ii
I	0	0	1	$-\frac{7}{3}$	$\frac{2}{3}$	11	$u_1 = 11$
II	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	14	$x_1 = 14$
III	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	13	$x_2 = 13$
ZF	0	0	0	$-\frac{10}{3}$	$-\frac{10}{3}$	G - 670	G = 670

(5) Deskriptive Statistik I: Häufigkeitsverteilung / Mittelwerte / Streumaße (klassiert)

Eine Umfrage unter 240 Schülern ergab folgende Verteilung des monatlichen Taschengeldes in €:

Klasse	$0 \leq x < 5$	$5 \leq x < 10$	$10 \leq x < 20$	$20 \leq x < 30$	$30 \leq x < 50$	$50 \leq x \leq 75$
rel. H.	x %	1,5x %	2x %	15 %	3x %	x %

a) Füllen Sie die Tabelle anhand der Angaben korrekt aus.

Anlage: Tabelle zur Bearbeitung

Klasse	Abs. H'keit	Rel. H'keit	Kum. rel. H'keit	Klassenmitte	Klassenbreite	Häufigkeitsdichte

Klasse	abs. H'keit	rel. H'keit	kum. rel. H'keit	KM	KB	HDI
[0 ; 5[24	0,10	0,10	2,5	5	4,80
[5 ; 10[36	0,15	0,25	7,5	5	7,20
[10 ; 20[48	0,20	0,45	15	10	4,80
[20 ; 30[36	0,15	0,60	25	10	3,60
[30 ; 50[72	0,30	0,90	40	20	3,60
[50 ; 75]	24	0,10	1,00	62,5	25	0,96
Summe	240	1	---		75	

NR: $240 = 8,5x + 36 \Rightarrow 204 = 8,5x \Rightarrow x = 24$

b) Ermitteln Sie das arithmetische Mittel.

Lösung:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^k \left[(x_i)_m \cdot \frac{n_i}{n} \right] = \sum_{i=1}^k \left[(x_i)_m \cdot p_i \right] \rightarrow \bar{x} = 26,375$$

mit $(x_i)_m$ als Klassenmitte und $p_i = \frac{n_i}{n}$ = relative Häufigkeit der Klasse i

c) Berechnen Sie die Varianz und die Standardabweichung.

Lösung:

$$\left. \begin{array}{l}
 V(X) \stackrel{\substack{\text{Definitions} \\ \text{formel}}}{=} \sum_{i=1}^n \left[(x_i)_m - \bar{x} \right]^2 \cdot p_i \\
 V(X) \stackrel{\substack{\text{Rechen} \\ \text{formel}}}{=} \left[\sum_{i=1}^n (x_i)_m^2 \cdot p_i \right] - \bar{x}^2
 \end{array} \right\} \Rightarrow S(X) = \sqrt{V(X)}$$

mit $(x_i)_m$ als Klassenmitte und p_i als relative Häufigkeit der Klasse i

Varianz:	322,796875
StdAbw:	17,9665488

d) Bestimmen Sie den Median, die beiden Quartilwerte und den Modus.

Lösung:

$$\bar{x}_M = 20 + \frac{10 \cdot (0,5 - 0,45)}{0,15} = 23,33$$

$$\bar{q}_1 = 5 + \frac{5 \cdot (0,25 - 0,10)}{0,15} = 10 \quad \text{und} \quad \bar{q}_3 = 30 + \frac{20 \cdot (0,75 - 0,60)}{0,30} = 40$$

$$\text{Modus: } \xrightarrow{HDI_{\max} = 7,2} \text{ modale Klasse: } [5; 10[\xrightarrow{KM} \bar{x}_{\text{Modus}} = 7,5$$

e) Wie viel Taschengeld geben die Eltern insgesamt monatlich aus?

Lösung:

$$\text{Gesamtausgabe: } 240 \cdot \bar{x} = 240 \cdot 26,375 = 6.330,00$$

(6) Deskriptive Statistik II: Häufigkeitsverteilung / Mittelwerte / Streumaße (Einzelwerte)

Teil 1:

Es wurden insgesamt 24 Proben von Marillen auf Rückstände von Pflanzenschutzmitteln hin untersucht (siehe nachstehende Tabelle).

Anzahl der festgestellten Pflanzenschutzmittel pro Probe	Anzahl der Proben
1	4
2	10
3	3
4	2
5	2
6	3

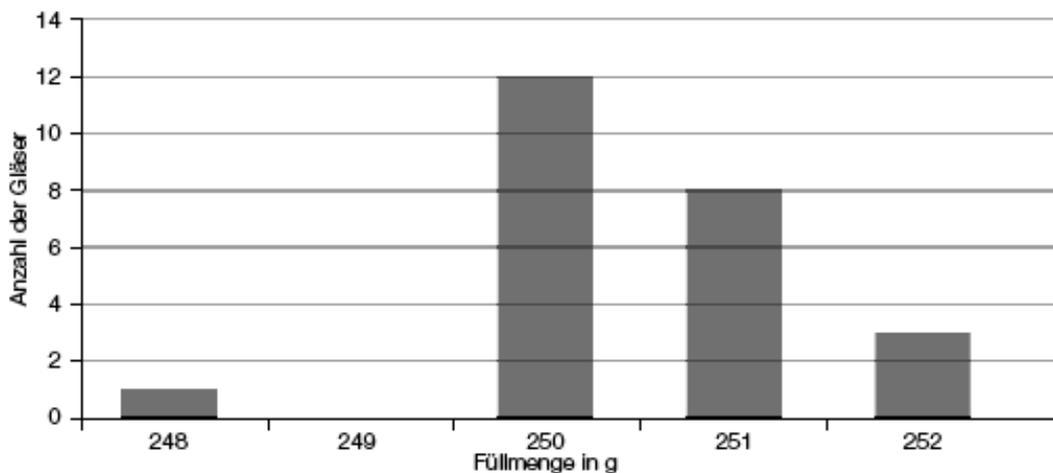
Bestimmen Sie das **arithmetische Mittel** und die **Standardabweichung** der Anzahl der festgestellten Pflanzenschutzmittel.

Lösung:

Anzahl Pfl	abs. H'keit	rel. H'keit	Anz * abs	quadr.	gew		
1	4	0,167	4	1	0,167		
2	10	0,417	20	4	1,667		
3	3	0,125	9	9	1,125		
4	2	0,083	8	16	1,333		
5	2	0,083	10	25	2,083		
6	3	0,125	18	36	4,500		MW ²
Summe	24	1	69		10,875	minus	8,26563
			MW	2,875	Varianz	2,609375	
					StdAbw	1,615356	

Teil 2:

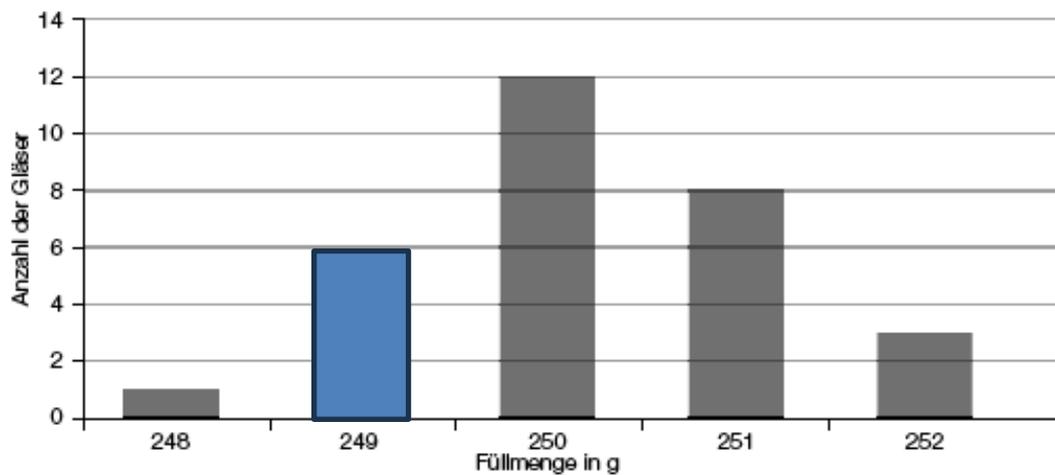
Im Zuge der Qualitätsprüfung wurde von 30 Gläsern mit Himbeermarmelade jeweils die Füllmenge erhoben und auf Gramm (g) gerundet. Die Ergebnisse dieser Qualitätsprüfung sind im nachstehenden Säulendiagramm dargestellt.



- Zeichnen Sie in obigem Diagramm die fehlende Säule ein und ermitteln Sie
- den Modus,
- den Median
- und die beiden Quartile.

Lösung:

Im Zuge der Qualitätsprüfung wurde von 30 Gläsern mit Himbeermarmelade jeweils die Füllmenge erhoben und auf Gramm (g) gerundet. Die Ergebnisse dieser Qualitätsprüfung sind im nachstehenden Säulendiagramm dargestellt.



$$\text{NR: } 30 - 1 - 12 - 8 - 3 = 6$$

Modus: 250 Gramm (12 Gläser => größte Anzahl)

Median:

$$\begin{aligned} \overline{x}_M & \text{ für } n \text{ gerade} \\ \overline{x}_M & = \frac{1}{2} \left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1} \right) \rightarrow \overline{x}_M \stackrel{n=30}{=} \frac{1}{2} \left(x_{15} + x_{16} \right) = \frac{1}{2} (250 + 250) = 250 \end{aligned}$$

Quartile:

$$\begin{aligned} \overline{x}_p & \text{ für } (n \cdot p) \\ & \text{ nicht ganzzahlig} \\ \overline{x}_p & = x_{[n \cdot p]+1} \rightarrow \overline{x}_p = x_{[30 \cdot 0,25]+1} = x_8 = 250 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{x}_p & \text{ für } (n \cdot p) \\ & \text{ nicht ganzzahlig} \\ \overline{x}_p & = x_{[n \cdot p]+1} \rightarrow \overline{x}_p = x_{[30 \cdot 0,75]+1} = x_{23} = 251 \end{aligned}$$

$$p = 0,25 \rightarrow q1 \quad \text{und} \quad p = 0,75 \rightarrow q3$$

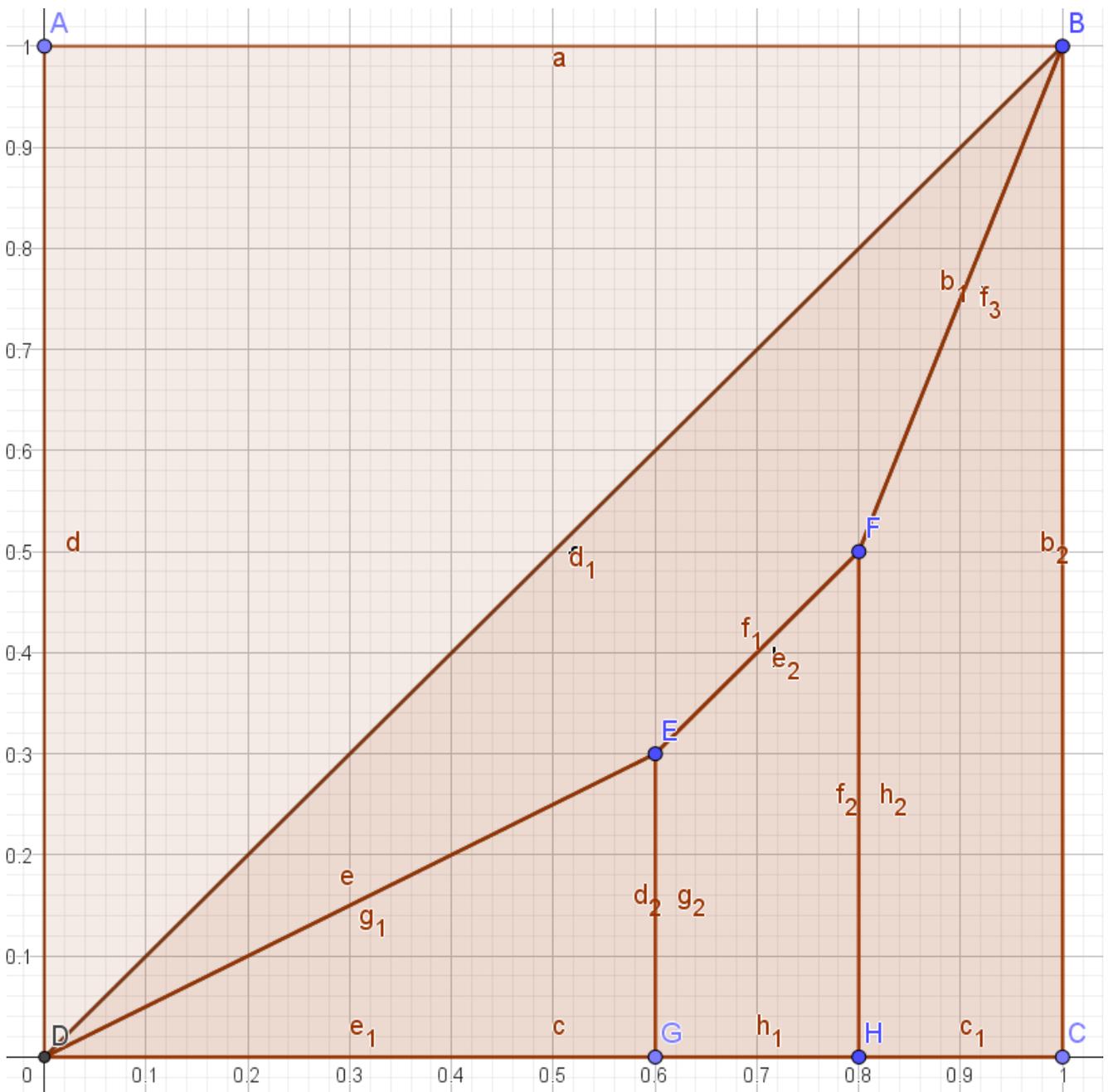
(7) Deskriptive Statistik III: Gini-Koeffizient & Lorenzkurve

Im Landkreis Statistika gibt es 5 Krankenkassen (x-Achse), wobei sich die Gesamtzahl der **2 Mio. Mitglieder** (y-Achse) wie folgt aufteilt:

Krankenkasse	Absolute Mitgliederanzahl	Relative Mitgliederanzahl
KMK	200.000	
KDA	400.000	
MKD	200.000	
Zwerg		
Hightower		0,5

Zeichnen Sie die dazugehörige Lorenzkurve und berechnen Sie den Gini-Koeffizient.

Lösung:



Tabellen ausgefüllt

Krankenkasse	rel. H'keit	kum. Rel. H'keit	Absolute Mitgliederanzahl	Relative Mitgliederanzahl	kum. Rel. H'keit
KMK	0,20	0,20	200.000	0,1	0,1
KDA	0,20	0,40	400.000	0,2	0,3
MKD	0,20	0,60	200.000	0,1	0,4
Zwerg	0,20	0,80	200.000	0,1	0,5
Hightower	0,20	1,00	1.000.000	0,5	1
			2.000.000		

Tabellen entsprechend der Mitgliederanzahl geordnet

Krankenkasse	rel. H'keit	kum. Rel. H'keit	Absolute Mitgliederanzahl	Relative Mitgliederanzahl	kum. rel. H'keit
KMK; MKD; Zwerg	0,60	0,60	600.000	0,3	0,3
KDA	0,20	0,80	400.000	0,2	0,5
Hightower	0,20	1,00	1.000.000	0,5	1
	1		2.000.000	1	

Gini-Koeffizient: $GK = 0,36$

Normierter Gini-Koeffizient: $norm. GK = 0,36 * 5/4 = 0,45$

Wegen $K_{max} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$ folgt normierte Gini-Koeffizient: $norm. Gini = K \cdot \frac{2n}{n-1} = 2K \cdot \frac{n}{n-1} = GK \cdot \frac{n}{n-1}$

Nebenrechnungen – Flächen unter der Lorenzkurve:

$$A1 = 0,5 * 0,6 * 0,3 = 0,09 \quad A2 = 0,5 * (0,3 + 0,5) * 0,2 = 0,08 \quad A3 = 0,5 * (0,5 + 1) * 0,2 = 0,15$$

$$A \text{ (gesamt)} = 0,09 + 0,08 + 0,15 = 0,32 \quad \Rightarrow \quad KF = 0,5 - 0,32 = 0,18$$

(8) Deskriptive Statistik IV:

Regression und Korrelation & Warenkorbmethode mit Preisindizes

Teil 1:

In einem Labor wurde für 13 Stahlstäbe gleicher Länge und gleichen Querschnitts, aber unterschiedlichen Kohlenstoffgehalts, die Zugfestigkeit s gemessen.

Es ergab sich nebenstehendes Messergebnis:

- i. Ermitteln Sie die zugehörige Regressionsgerade $s(C)$.
- ii. Wie hoch ist die voraussichtlich Zugfestigkeit bei einem C-Gehalt von 0,9 %?
- iii. Welcher C-Gehalt muss vorliegen, wenn eine Zugfestigkeit 150 N/mm^2 gewünscht wird?
- iv. Berechnen Sie den zugehörigen Korrelationskoeffizient nach Pearson.

C-Gehalt (in%)	Zugfestigkeit in N/mm^2
0,10	35,80
0,30	52,20
0,15	40,00
0,60	84,90
0,70	88,50
0,20	43,40
0,50	72,10
0,20	44,50
0,30	56,80
0,15	38,70
0,55	78,30
0,60	82,20
0,20	41,10

Lösung:

- a) Regressionsgerade: $y = 25,19 + 94,73x$
- b) $y = 25,19 + 94,73 \cdot 0,9 \rightarrow y = 110,45$
- c) $150 = 25,19 + 94,73 \cdot x \rightarrow x = 1,3175 [\%]$
- d) enge positive Korrelation: $r = 0,9955$

Teil 2: Warenkorbmethode und Preisindexberechnung

Ein Unternehmen hat eine Preis-Mengen-Übersicht für die bezogenen Güter A, B und C angefertigt.

Gut	Preise		Mengen	
	2020	2025	2020	2025
A	10	15	60	50
B	25	20	40	70
C	30	40	80	60

a) Ermitteln Sie hierzu die Preisindizes nach Laspeyres und Paasche.

Lösung:

$$L_p = \frac{\sum p_{1i} \cdot q_{0i}}{\sum p_{0i} \cdot q_{0i}} \quad \text{mit } i \in N \rightarrow L_p = \frac{15 \cdot 60 + 20 \cdot 40 + 40 \cdot 80}{10 \cdot 60 + 25 \cdot 40 + 30 \cdot 80} = \frac{4.900}{4.000} = 1,2250$$

$$P_p = \frac{\sum p_{1i} \cdot q_{1i}}{\sum p_{0i} \cdot q_{1i}} \quad \text{mit } i \in N \rightarrow P_p = \frac{15 \cdot 50 + 20 \cdot 70 + 40 \cdot 60}{10 \cdot 50 + 25 \cdot 70 + 30 \cdot 60} = \frac{4.550}{4.050} = 1,1234$$

b) Berechnen Sie den Preisindex nach Fisher.

Lösung:

$$F_p = \sqrt{L_p \cdot P_p} \quad \text{geometr. Mittel} \rightarrow F_p = \sqrt{1,2250 \cdot 1,1234} = 1,1731$$

c) Wie hoch ist die jährliche Inflationsrate auf der Grundlage der Daten nach Laspeyres?

Lösung:

$$L_p = 1,2250 \rightarrow p = \left(\sqrt[5]{1,2250} - 1 \right) \cdot 100 = 4,1423[\%]$$