

Übung Statisches Gleichgewicht – Aufgabe Raucherverhalten

	<i>N</i>	<i>G</i>	<i>R</i>
<i>N</i>	0,80	0,35	0,05
<i>G</i>	0,12	0,33	0,10
<i>R</i>	0,08	0,32	0,85

$$\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$$

$$U \cdot \vec{p}_0 = U \cdot \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,635 \\ 0,160 \\ 0,205 \end{pmatrix}$$

	<i>N</i>	<i>G</i>	<i>R</i>
<i>N</i>	0,80	0,35	0,05
<i>G</i>	0,12	0,33	0,10
<i>R</i>	0,08	0,32	0,85

$$\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$$

Statisches Gleichgewicht:

$$U \cdot \vec{x} = \vec{x} \rightarrow (U - E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \quad [\text{mit 1-Zeile}]$$

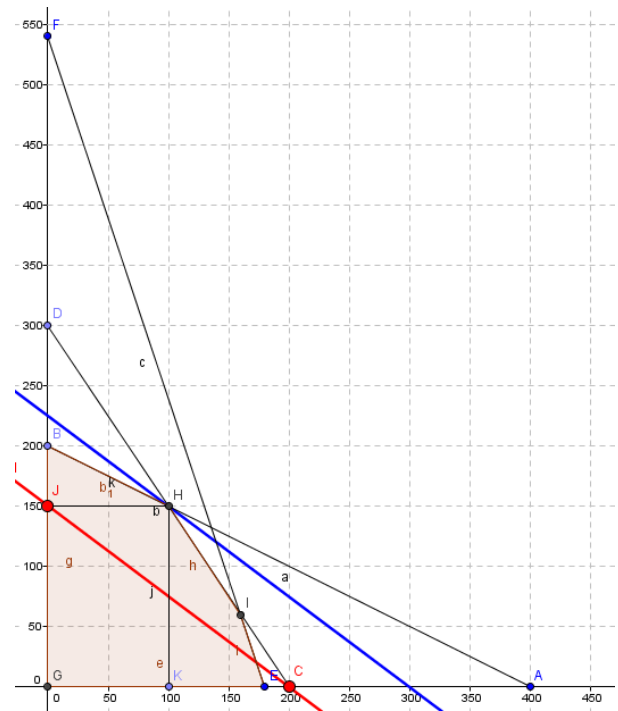
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -0,20 & 0,35 & 0,05 & 0 \\ 0,12 & -0,67 & 0,10 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 0,367 \\ 0,140 \\ 0,493 \end{pmatrix} = \frac{1}{373} \begin{pmatrix} 137 \\ 52 \\ 184 \end{pmatrix}$$

Lineare Optimierung

	Bearbeitungszeit für P ₁	Bearbeitungszeit für P ₂	Kapazität
M ₁	20	40	8.000
M ₂	15	10	3.000
M ₃	30	10	5.400

a) Der Deckungsbeitrag pro ME beträgt 90 GE von P₁ und 120 GE von P₂.

Graphische Lösung:



Restriktionen: Maschinenlaufzeiten

Anzahl P1: x Anzahl P2: y

Restriktionen:

$$M_1 \quad | \quad 20x + 40y \leq 8.000$$

$$M_2 \quad | \quad 15x + 10y \leq 3.000$$

$$M_3 \quad | \quad 30x + 10y \leq 5.400$$

Zielfunktion: $G(x, y) = 90x + 120y \rightarrow \max.$

⇒ Lösungen im **Simplex(Raum)** finden

Lösung per **Simplexalgorithmus**: Analytische Lösung (in Anlehnung an Gauß-Verfahren)

Anzahl P1: x Anzahl P2: y

Restriktionen:

M_1	$20x + 40y \leq 8.000$	$\xrightarrow{\text{Gleichung}}$	Hinzufügen	$20x + 40y + u_1 = 8.000$
M_2	$15x + 10y \leq 3.000$	$\xrightarrow{\text{Gleichung}}$	von	$15x + 10y + u_2 = 3.000$
M_3	$30x + 10y \leq 5.400$	$\xrightarrow{\text{Gleichung}}$	Schlupfvariablen	$30x + 10y + u_3 = 5.400$

Zielfunktion: $G(x, y) = 90x + 120y \rightarrow \max.$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
i	20	40	1	0	0	8.000	$\xrightarrow{\frac{8.000-200}{40}} \frac{1}{40}i$
ii	15	10	0	1	0	3.000	$\frac{3.000}{10} = 300$
iii	30	10	0	0	1	5.400	$\frac{5.400}{10} = 540$
ZF	90	120	0	0	0	G	

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
i	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{40}$	0	0	200	
ii	15	10	0	1	0	3.000	$ii - 10i$
iii	30	10	0	0	1	5.400	$iii - 10i$
ZF	90	120	0	0	0	G	$ZF - 120i$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
i	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{40}$	0	0	200	$\frac{200}{0,5} = 400$
ii	10	0	$-\frac{1}{4}$	1	0	1.000	$\xrightarrow{\frac{1.000-100}{10}} \frac{1}{10}ii$
iii	25	0	$-\frac{1}{4}$	0	1	3.400	$\frac{3.400}{25} = 136$
ZF	30	0	-3	0	0	$G - 24.000$	

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
i	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{40}$	0	0	200	$i - \frac{1}{2}ii$
ii	1	0	$-\frac{1}{40}$	$\frac{1}{10}$	0	100	
iii	25	0	$-\frac{1}{4}$	0	1	3.400	$iii - 25ii$
ZF	30	0	-3	0	0	$G - 24.000$	$ZF - 30ii$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
i	0	1	$\frac{3}{80}$	$-\frac{1}{20}$	0	150	
ii	1	0	$-\frac{1}{40}$	$\frac{1}{10}$	0	100	
iii	0	0	$\frac{3}{8}$	-2,5	1	900	
ZF	0	0	-2,25	-3	0	$G - 27.000$	

Lösung: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \\ 900 \end{pmatrix}$ mit $G = 27.000$

- (1) $x \geq 0; y \geq 0$
 (2) $2x+3y \leq 30$
 (3) $2x+2y \leq 24$
 (4) $x \leq 10$
 (5) $Z(x,y) = 15x+10y \rightarrow \max$

Anzahl P1: x Anzahl P2: y

Restriktionen:

i	$2x+3y \leq 30$	$\xrightarrow{\text{Gleichung}}$	Hinzufügen	$2x+3y+u_1 = 30$
ii	$2x+2y \leq 24$	$\xrightarrow{\text{Gleichung}}$	von	$2x+2y+u_2 = 24$
iii	$x \leq 10$	$\xrightarrow{\text{Gleichung}}$	Schlupfvariablen	$x+u_3 = 10$

Zielfunktion: $G(x,y) = 15x+10y \rightarrow \max$.

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
i	2	3	1	0	0	30	$30/2=15 \rightarrow i-2iii$
ii	2	2	0	1	0	24	$24/2=12 \rightarrow ii-2iii$
iii	1	0	0	0	1	10	$10/1=10$
ZF	15	10	0	0	0	G	$ZF-15iii$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
i	0	3	1	0	-2	10	
ii	0	2	0	1	-2	4	
iii	1	0	0	0	1	10	
ZF	0	10	0	0	-15	G-150	

weiter

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
i	0	3	1	0	-2	10	$10/3=3,33$
ii	0	2	0	1	-2	4	$4/2=2 \rightarrow ii/2$
iii	1	0	0	0	1	10	
ZF	0	10	0	0	-15	G-150	

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
i	0	3	1	0	-2	10	$i-3ii$
ii	0	1	0	$\frac{1}{2}$	-1	2	
iii	1	0	0	0	1	10	
ZF	0	10	0	0	-15	G-150	$ZF-10ii$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
i	0	0	1	-1,5	1	4	
ii	0	1	0	$\frac{1}{2}$	-1	2	
iii	1	0	0	0	1	10	
ZF	0	0	0	-5	-5	G-170	

fertig

Lösung: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $G = 170$

- (1) $x \geq 0; y \geq 0$
- (2) $3x + 4y \leq 30$
- (3) $15x + 10y \leq 90$
- (4) $Z(x, y) = 10x + 10y \rightarrow \max$

Sonderfall: Steigung von Zielfunktion und mind. einer Restriktion-NB sind identisch und die beiden Zielkoeffizienten in der Zielfunktion $G(x, y)$ sind identisch (hier: zweimal den Wert 10)

Option 1: Start mit Spalte x:

Anzahl P1: x Anzahl P2: y

Restriktionen:

i	$3x + 6y \leq 30$	$\xrightarrow{\text{Gleichung}}$	Hinzufügen	$3x + 6y + u_1 = 30$
ii	$18x + 10y \leq 90$	$\xrightarrow{\text{Gleichung}}$	von	$18x + 10y + u_2 = 90$
iii	$10x + 10y \leq 60$	$\xrightarrow{\text{Gleichung}}$	Schlupfvariablen	$10x + 10y + u_3 = 60$

Zielfunktion: $G(x, y) = 10x + 10y \rightarrow \max.$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
i	3	6	1	0	0	30	$30/3 = 10$
ii	18	10	0	1	0	90	$90/18 = 5 \rightarrow ii/18$
iii	10	10	0	0	1	60	$60/10 = 6$
ZF	10	10	0	0	0	G	

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
i	3	6	1	0	0	30	$i - 3ii$
ii	1	$\frac{5}{9}$	0	$\frac{1}{18}$	0	5	
iii	10	10	0	0	1	60	$iii - 10ii$
ZF	10	10	0	0	0	G	$ZF - 10ii$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
i	0	$\frac{13}{3}$	1	$-\frac{1}{6}$	0	15	
ii	1	$\frac{5}{9}$	0	$\frac{1}{18}$	0	5	
iii	0	$\frac{40}{9}$	0	$-\frac{5}{9}$	1	10	
ZF	0	$\frac{40}{9}$	0	$-\frac{5}{9}$	0	$G - 50$	

weiter

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	<i>Umformung</i>
<i>i</i>	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{6}$	0	0	5	$5/0,5 = 10$
<i>ii</i>	13	0	$-\frac{5}{3}$	1	0	40	$40/13 = 3,33$
<i>iii</i>	5	0	$-\frac{5}{3}$	0	1	10	$10/5 = 2 \rightarrow iii/5$
ZF	5	0	$-\frac{5}{3}$	0	0	$G - 50$	

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	<i>Umformung</i>
<i>i</i>	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{6}$	0	0	5	$i - \frac{1}{2}iii$
<i>ii</i>	13	0	$-\frac{5}{3}$	1	0	40	$ii - 13iii$
<i>iii</i>	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{5}$	2	
ZF	5	0	$-\frac{5}{3}$	0	0	$G - 50$	$ZF - 5iii$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	<i>Umformung</i>
<i>i</i>	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{10}$	4	
<i>ii</i>	0	0	$\frac{8}{3}$	1	$-\frac{13}{5}$	14	
<i>iii</i>	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{5}$	2	
ZF	0	0	0	0	-1	$G - 60$	

fertig

Lösung :
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix} \text{ mit } G = 60$$

Option 2: Start mit Spalte y:

Anzahl P1: x Anzahl P2: y

Restriktionen:

i	$3x + 6y \leq 30$	$\xrightarrow{\text{Gleichung}}$	Hinzufügen	$3x + 6y + u_1 = 30$
ii	$18x + 10y \leq 90$	$\xrightarrow{\text{Gleichung}}$	von	$18x + 10y + u_2 = 90$
iii	$10x + 10y \leq 60$	$\xrightarrow{\text{Gleichung}}$	Schlupfvariablen	$10x + 10y + u_3 = 60$

Zielfunktion: $G(x, y) = 10x + 10y \rightarrow \max.$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
i	3	6	1	0	0	30	$30/6 = 5 \rightarrow i/6$
ii	18	10	0	1	0	90	$90/10 = 9$
iii	10	10	0	0	1	60	$60/10 = 6$
ZF	10	10	0	0	0	G	

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
i	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{6}$	0	0	5	
ii	18	10	0	1	0	90	$ii - 10i$
iii	10	10	0	0	1	60	$iii - 10i$
ZF	10	10	0	0	0	G	$ZF - 10i$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	Umformung
i	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{6}$	0	0	5	
ii	13	0	$-\frac{5}{3}$	1	0	40	
iii	5	0	$-\frac{5}{3}$	0	1	10	
ZF	5	0	$-\frac{5}{3}$	0	0	$G - 50$	

weiter

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	<i>Umformung</i>
<i>i</i>	0	$\frac{13}{3}$	1	$-\frac{1}{6}$	0	15	$\frac{45}{13}$
<i>ii</i>	1	$\frac{5}{9}$	0	$\frac{1}{18}$	0	5	9
<i>iii</i>	0	$\frac{40}{9}$	0	$-\frac{5}{9}$	1	10	$\frac{9}{4} \rightarrow iii \cdot \frac{9}{40}$
ZF	0	$\frac{40}{9}$	0	$-\frac{5}{9}$	0	$G-50$	

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	<i>Umformung</i>
<i>i</i>	0	$\frac{13}{3}$	1	$-\frac{1}{6}$	0	15	$i - \frac{13}{3}iii$
<i>ii</i>	1	$\frac{5}{9}$	0	$\frac{1}{18}$	0	5	$ii - \frac{5}{9}iii$
<i>iii</i>	0	1	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{9}{4}$	
ZF	0	$\frac{40}{9}$	0	$-\frac{5}{9}$	0	$G-50$	$ZF - \frac{40}{9}iii$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	<i>Umformung</i>
<i>i</i>	0	0	1	$-\frac{1}{6} + \frac{13}{24}$	$-\frac{39}{40}$	$15 - \frac{39}{4} = \frac{21}{4}$	
<i>ii</i>	1	0	0	$\frac{1}{18} + \frac{5}{72}$	$-\frac{1}{8}$	$5 - \frac{5}{4} = \frac{15}{4}$	
<i>iii</i>	0	1	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{9}{4}$	
ZF	0	0	0	0	-1	$G-60$	

fertig

$$\text{Lösung : } \begin{pmatrix} x \\ y \\ u_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 15 \\ 9 \\ 21 \end{pmatrix} \text{ mit } G = 60$$

Man erhält einen Lösungsbereich auf der Strecke zwischen den beiden Lösungen (vgl. Graph)

