

# Übung zur Klausur: Mathematik und Statistik

Lehrveranstaltung: Statistik

Fakultät für Wirtschaft

Studiengang: BWL-Öffentliche Wirtschaft

Datum: 06/2023

Studierende(r)  
Matrikelnummer:

Dozent: Jürgen Meisel

Kurs: WOW A/B

Studienjahrgang: 2022

Semester: 2

Hilfsmittel:

**Wiss. TR (nicht programmierbar) /  
Formelsammlung**

Bearbeitungszeit:

**60 Minuten**

Bewertung:

Maximale Punktzahl: 60

Erreichte Punktzahl:

Datum, Unterschrift

.....

Anmerkungen:

**Von 7 gestellten Aufgaben müssen 5 ausgewählt und bearbeitet  
werden.**

Aufgabennr.:	Thema / Bereich	maximale Punkte	erreichte Punkte	Bemerkungen
1	Mittelwerte & Streumaße (diskret)	12		
2	Mittelwerte & Streumaße (klassiert)	12		
3	Konzentration (Ginikoeff. & Lorenzkurve)	12		
4	Regression & Korrelation	12		
5	Preisindizes und Inflationsrate	12		
6	Stochastik: Verteilung (diskret)	12		
7	Stochastik: Verteilung (stetig)	12		
		<b>5 aus 7</b>		
<b>Summe</b>		<b>60</b>		

Hilfsmittel: Wiss. nicht progr. Taschenrechner + Formelsammlung  
 Bearbeitungszeit: 60 Minuten

**Aufgabe 1: Mittelwerte und Streumaße (diskret)**

Dozent Knackfisch unterrichtet an der Dualen Hochschule Düppelborn im Schweiße seines Angesichts BWL. Er überlegt sich, ob er zukünftig ganz auf die S-Bahn umsteigen sollte und hat hierzu einige Testdaten aus den bisherigen **50 Fahrten** gesammelt:

Benötigte Fahrzeit [in Minuten]	Anzahl der Fahrten
25	7
30	???
32	12
35	13
40	2
60	1
<b>Summe</b>	

- a) Bestimmen Sie aus den Daten folgende Größen: Arithmetisches Mittel, Modus und Median
- b) Ermitteln Sie auch die zugehörigen Streumaße Standardabweichung und beide Quartile.

Lösung:

Minuten	Anzahl	Produkt	quadr. Minuten	Produkt
25	7	175	625	4375
30	15	450	900	13500
32	12	384	1024	12288
35	13	455	1225	15925
40	2	80	1600	3200
60	1	60	3600	3600
Summe	50	1604		52888

MW:	32,08	1604 / 50	StdAbw	5,351	1057,76	28,6336	Varianz
				Wurzel Var.	1029,1264		
Median	32	1/2 * (x25+x26)	Quartil 1	x13 = 30			
			Quartil 3	x38 = 35			
Modus	30	häufigster Wert					

$$V(X) \stackrel{\substack{\text{Rechen} \\ \text{formel}}}{=} \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i)^2 \right] - \bar{x}^2$$

$$\Rightarrow S(X) = \sqrt{V(X)}$$
  

$$\bar{x}_p = \begin{cases} x_{[n \cdot p]+1} & \text{für } (n \cdot p) \text{ nicht ganzzahlig} \\ \frac{1}{2}(x_{n \cdot p} + x_{n \cdot p+1}) & \text{für } (n \cdot p) \text{ ganzzahlig} \end{cases}$$
  

50 * 0,25	12,5	Pos. 13	x13
50 * 0,75	37,5	Pos. 38	x38

## Aufgabe 2: Mittelwerte und Streumaße (klassiert)

Häufigkeitstabelle der Fahrten mit dem Pkw:

Fahrzeit [Min]	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit	Klassenmitte	Klassenbreite	Häufigkeitsdichte	kum. rel. Häufigkeit
[22 ; 30[	10					
[30 ; 34[	30					
[34 ; 38[		0,25				
[38 ; 46[	10	0,1				
[46 ; 60[						
Summe						

- Vervollständigen Sie die Tabelle.
- Bestimmen Sie den arithmetischen Mittelwert, die modale Klasse und den Modalwert.
- Berechnen Sie den Median, das untere Quartil und das obere Quartil.

Lösung:

Fahrzeit [Min]	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit	Klassenmitte	Klassenbreite	Häufigkeitsdichte	kum. rel. Häufigkeit	quadrierte Klassenmitte	gewichtet
[22 ; 30[	10	0,1	26	8	1,25	0,1	676	67,6
[30 ; 34[	30	0,3	32	4	7,5	0,4	1024	307,2
[34 ; 38[	25	0,25	36	4	6,25	0,65	1296	324
[38 ; 46[	10	0,1	42	8	1,25	0,75	1764	176,4
[46 ; 60[	25	0,25	53	14	1,786	1	2809	702,25
Summe	100	1						
					abs. Hkeit / Klassenbreite			
							Summe:	1577,45
							quadrierter MW:	1493,8225
MW	38,65						Varianz:	83,6275
Median	35,6	$34 + 4 \cdot (0,5 - 0,4) / 0,25$					StdAbw:	9,145
Modus	32	[30 ; 34[						
			Schritt 1: Modale Klasse bestimmen					
			⇒ Klasse mit max. Häufigkeitsdichte					
			Schritt 2:					
			⇒ Wert der Klassenmitte der modalen Klasse					

Quartil 1	$30 + 4 \cdot (0,25 - 0,1) / 0,3$		$q_1 \Rightarrow \overline{x}_{0,25} = [a; b] \rightarrow \overline{x}_{0,25} = a + \frac{\Delta_i \cdot [0,25 - F(a)]}{p_i}$
	32		
Quartil 3	$38 + 8 \cdot (0,75 - 0,65) / 0,1$		$q_3 \Rightarrow \overline{x}_{0,75} = [a; b] \rightarrow \overline{x}_{0,75} = a + \frac{\Delta_i \cdot [0,75 - F(a)]}{p_i}$
	46		

### Aufgabe 3: Gini-Koeffizient & Lorenzkurve

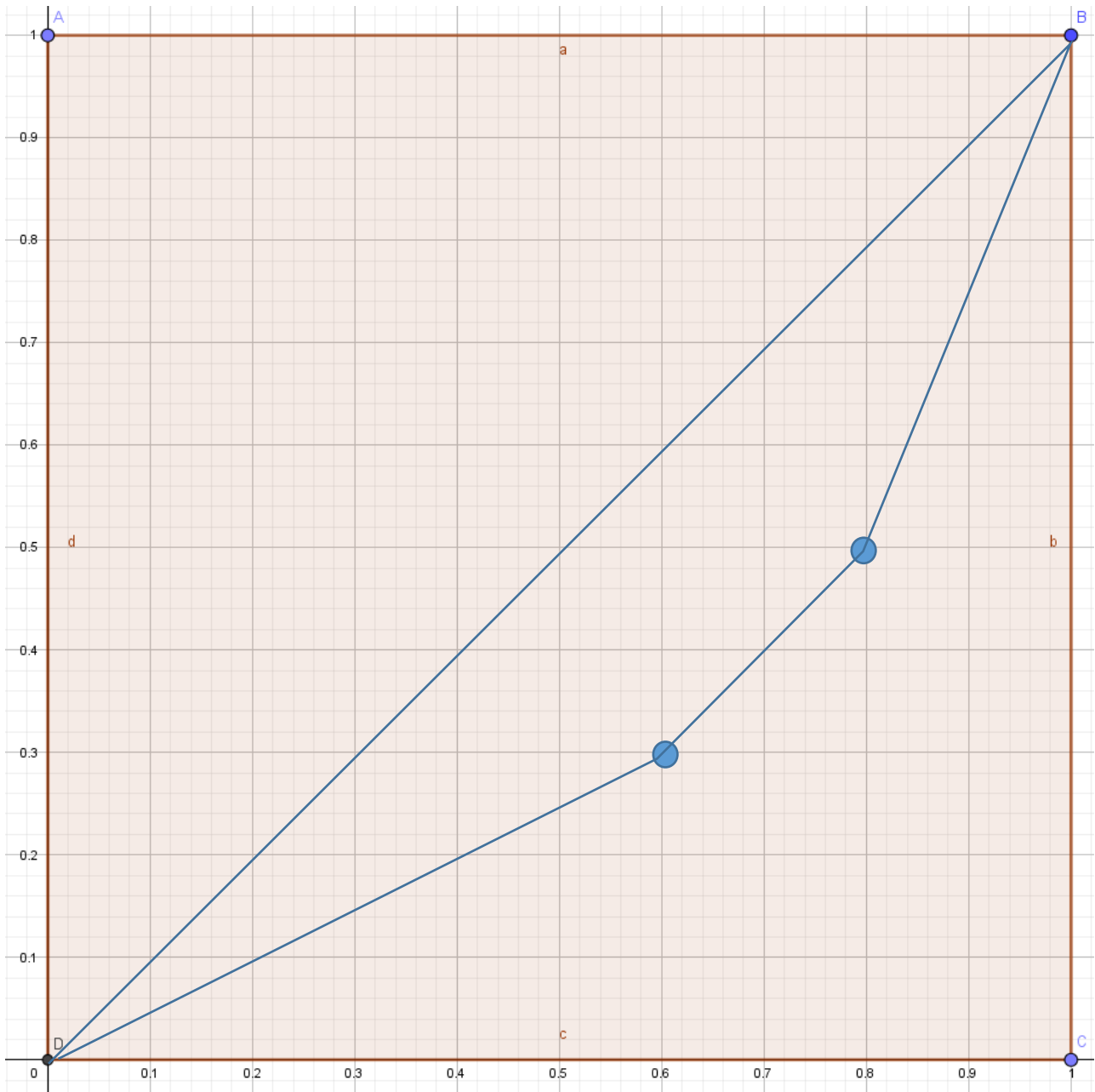
Im Landkreis Statistika gibt es 5 Gemüsebauern (x-Achse), wobei sich die kultivierte Gesamtfläche auf **5.000 ha** beläuft. Die Fläche (y-Achse) ist wie folgt aufteilt:

Betrieb	Fläche in ha	Relativer Flächenanteil
Adelbert	500	
Zwergfried	1.000	
Moppps	500	
Günstling		
Rübenkurt		0,5

- Zeichnen Sie die dazugehörige Lorenzkurve und berechnen Sie den Gini-Koeffizient.
- Ermitteln Sie den normierten Gini-Koeffizienten und erläutern Sie den Unterschied.

Lösung:

Betrieb	Fläche in ha	Relativer Flächenanteil			
Adelbert	500	0,1			
Zwergfried	1.000	0,2			
Moppps	500	0,1			
Günstling	500	0,1			
Rübenkurt	2.500	0,5			
<b>BETRIEBE</b>			<b>FLÄCHEN</b>		
Betrieb	rel. Anteil	kumulierter rel. Anteil	Fläche gesamt	rel. Anteil	kumulierter rel. Anteil
Adel, Moppps, Günst	0,6	0,6	1500	0,3	0,3
Zwergfried	0,2	0,8	1000	0,2	0,5
Rübenkurt	0,2	1	2500	0,5	1
Summe			5000		



**Max. KF: 0,5**

**Fläche unterhalb der Lorenzkurve:  $0,09 + 0,08 + 0,15 = 0,32$**

$$A1 = 0,6 * 0,3 * 1/2 = 0,09$$

$$A2 = \frac{1}{2} * (0,3 + 0,5) * 0,2 = 0,08$$

$$A3 = \frac{1}{2} * (0,5 + 1) * 0,2 = 0,15$$

$$GK = \frac{0,5 - 0,32}{0,5} = 0,36$$

$$norm. Gini = K \cdot \frac{2n}{n-1} \quad norm. GK = 0,18 \cdot 2 \cdot \frac{5}{4} = 0,45$$

#### Aufgabe 4: Regression & Korrelation

Für die Bestimmung des Geschäftsklimaindex spielt die Zuversicht der Unternehmen über die wirtschaftliche Zukunft eine Rolle. In der folgenden Tabelle ist die Erhebung dieser Zuversicht für 10 Unternehmen zu zwei verschiedenen Zeitpunkten dargestellt. Dabei konnte die Zuversicht auf einer Skala von 0 (= ganz pessimistisch) bis 100 (= sehr optimistisch) angegeben werden.

Beobachtung	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Zuversicht Zeitpunkt 1	48	65	56	59	44	60	55	50	52	
Zuversicht Zeitpunkt 2	33	40	46	49	32	36	42	39	44	

- a) Berechnen Sie **Korrelation nach Pearson** und **die Kovarianz** und ...  
 - oh je, leider ist etwas Kaffee drübergelaufen 😊
- b) Berechnen Sie auch die lineare Regressionsfunktion.

#### Anmerkung:

- (i) **Geben Sie bei den Teilaufgaben a) und b) die notwendigen Formeln an;**  
 (ii) **Sie können zudem die hier bereits berechneten Hilfsgrößen bei Ihrer eigenen Ermittlung der Lösungen verwenden.**

$$\sum_{i=1}^{10} \text{Zeit1}_i = 535 \quad \sum_{i=1}^{10} \text{Zeit2}_i = 409 \quad \sum_{i=1}^{10} (\text{Zeit1}_i \cdot \text{Zeit2}_i) = 22.143 \quad \sigma_{\text{Zeit1}}^2 = 40,45 \quad \sigma_{\text{Zeit2}}^2 = 32,29$$

Lösung:

Beobacht.	Zeitp. 1	Zeitp.2	x*x	y*y	x*y
<b>Summe:</b>	<b>535</b>	<b>409</b>	<b>29027</b>	<b>17051</b>	<b>22143</b>
<b>MW</b>	<b>53,5</b>	<b>40,9</b>	<b>2902,7</b>	<b>1705,1</b>	<b>2214,3</b>
<b>Varianz</b>			<b>StdAbw</b>		
<b>Zeit 1</b>	<b>40,45</b>		<b>Zeit 1</b>	<b>6,360</b>	
<b>Zeit 2</b>	<b>32,29</b>		<b>Zeit 2</b>	<b>5,682</b>	
<b>Korrel</b>	<b>0,7235664</b>				
<b>Steigung</b>		<b>0,6464771</b>		<b>y = 0,646x + 6,313</b>	
<b>Achsenabschnitt</b>		<b>6,3134734</b>			

Die Lösungen können entweder durch Ergänzung der beiden „fehlenden“ Werte erzeugt werden oder Sie wenden die berechneten Hilfsgrößen und die zugrundeliegenden Formeln an – Wie hier bei der Kovarianz demonstriert:

$$\begin{aligned} \text{Kovarianz}(X, Y) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i \cdot y_i) - \bar{x} \cdot \bar{y} \\ \text{Kov}(X, Y) &= \frac{1}{10} \cdot 22.143 - 53,5 \cdot 40,9 = 26,15 \end{aligned}$$

### Aufgabe 5: Warenkorbmethode und Preisindexberechnung

Ein Unternehmen hat eine Preis-Mengen-Übersicht für die bezogenen Güter A, B und C angefertigt.

Gut	Preise		Mengen	
	2018	2023	2018	2023
A	10	15	60	50
B	25	20	40	70
C	30	40	80	60

- Ermitteln Sie hierzu die Preisindizes nach Laspeyres und Paasche.
- Berechnen Sie den Preisindex nach Fisher.
- Wie hoch ist die jährliche Inflationsrate auf der Grundlage der Daten nach Laspeyres?

Lösung:

$$\text{Laspeyres: } L_p = \frac{\sum p_{23i} \cdot q_{18i}}{\sum p_{18i} \cdot q_{18i}}$$

→  $\frac{\text{Ausgaben des Berichtsjahres mit Mengen des Basisjahres (Menge}_{\text{Periode I}} \cdot \text{Preis}_{\text{Periode II}})}{\text{Ausgaben/Umsatz des Basisjahres (Menge}_{\text{Periode I}} \cdot \text{Preis}_{\text{Periode I}})}$

$$L_p = \frac{15 \cdot 60 + 20 \cdot 40 + 40 \cdot 80}{10 \cdot 60 + 25 \cdot 40 + 30 \cdot 80} = \frac{4900}{4000} = 1,225$$

$$\text{Paasche: } P_p = \frac{\sum p_{23i} \cdot q_{23i}}{\sum p_{18i} \cdot q_{23i}}$$

→  $\frac{\text{Ausgaben/Umsatz des Berichtsjahres (Menge}_{\text{Periode II}} \cdot \text{Preis}_{\text{Periode II}})}{\text{Ausgaben des Basisjahres mit Mengen des Berichtsjahres (Menge}_{\text{Periode II}} \cdot \text{Preis}_{\text{Periode I}})}$

$$P_p = \frac{15 \cdot 50 + 20 \cdot 70 + 40 \cdot 60}{10 \cdot 50 + 25 \cdot 70 + 30 \cdot 60} = \frac{4550}{4050} = 1,1234$$

$$F_p = \sqrt{L_p \cdot P_p} \rightarrow \sqrt{1,225 \cdot 1,1234} = 1,1731$$

$$\text{Inflationsrate: } \sqrt[3]{1,225} = 1,04142 \rightarrow i_{\text{eff}} = 1,04142 - 1 = 0,04142 \xrightarrow{\cdot 100} 4,142\%$$

**Aufgabe 6: Stochastik – Binomialverteilung – Flüssigdünger im Garten**

Es werden zur Kontrolle 80 Stichproben aus der laufenden Produktion einer Produktlinie mit neuem Wirkungsgrad, von denen 97 % einen positiven Effekt generieren sollen, entnommen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind unter den entnommenen Proben

- genau 54 mit positivem Effekt?
- zwischen 1 bis 4 ohne entsprechenden Effekt?
- Mindestens 60 mit positivem Effekt?
- Wie viele Proben müssen der Produktion entnommen werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von 98 % mind. eine Probe ohne positiven Effekt zu erhalten?

Lösung:

$$\mu_{BV}(X) = n \cdot p \rightarrow \mu = 80 \cdot 0,97 = 77,6$$

$$a) \quad B_{80;0,97}(X = 54) = \binom{80}{54} 0,97^{54} \cdot 0,03^{26} = 0,00$$

$$b) \quad B_{80;0,03}(1 \leq Y \leq 4) = \sum_{Y=1}^4 \binom{80}{Y} 0,03^Y \cdot 0,97^{80-Y} = 0,8198$$

$$c) \quad B_{80;0,97}(X \geq 60) = \sum_{X=60}^{80} \binom{80}{X} 0,97^X \cdot 0,03^{80-X} = 1,00$$

d)

$$B_{n;0,03}(X \geq 1) \geq 0,98 \rightarrow 1 - B_{n;0,03}(X = 0) \geq 0,98 \rightarrow B_{n;0,03}(X = 0) \leq 0,02$$

$$\rightarrow \binom{n}{0} \cdot 0,03^0 \cdot 0,97^n \leq 0,02 \rightarrow \ln 0,97^n \leq \ln 0,02 \rightarrow n \cdot \ln 0,97 \leq \ln 0,02$$

$$\rightarrow n \geq \frac{\ln 0,02}{\ln 0,97} \approx 128,43 \rightarrow n \geq 129$$