Klausur: Mathematik am Montag, den 12. Dezember 2011

Jürgen Meisel

Zugelassene Hilfsmittel: Nicht grafikfähiger Taschenrechner; Formelsammlung
Bearbeitungszeit: 60 Minuten

1.) **Extrema ohne Nebenbedingungen**

Ermitteln Sie die sechs stationären Stellen der Funktion

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + \frac{1}{3}y^3 - 2y^2$$

und untersuchen Sie diese Stellen auf ihre Extremwerteigenschaft.

Anmerkung: Eine Berechnung der Funktionswerte soll nicht erfolgen!

Lösung:

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + \frac{1}{3}y^3 - 2y^2$$

$$I.) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x^3 - 8x \overset{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad 2x\left(x^2-4\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = 2 \quad \wedge \quad x_3 = -2$$

$$II.) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y^2 - 4y \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad y(y-4) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 0 \quad \wedge \quad y_2 = 4$$

Es resultieren sechs stationäre Stellen:

$$S_1(0 \mid 0 \mid f_1) \quad ; \quad S_3(2 \mid 0 \mid f_3) \quad ; \quad S_5(-2 \mid 0 \mid f_5) \quad ;$$
$$S_2(0 \mid 4 \mid f_2) \quad ; \quad S_4(2 \mid 4 \mid f_4) \quad ; \quad S_6(-2 \mid 4 \mid f_6)$$

$$Hesse-Matrix: \quad H(f) = \begin{pmatrix} 6x^2-8 & 0 \\ 0 & 2y-4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad H\left(f_{S_1}\right) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad f_{xx} = -8 < 0 \quad \wedge \quad \det(H) = 32 > 0 \quad \Rightarrow \quad Max(0 \mid 0 \mid 0)$$

$$\Rightarrow \quad H\left(f_{S_2}\right) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(H) = -32 < 0 \quad \Rightarrow \quad Sattelpunkt$$

$$\Rightarrow \quad H\left(f_{S_3}\right) = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(H) = -64 < 0 \quad \Rightarrow \quad Sattelpunkt$$

$$\Rightarrow \quad H\left(f_{S_4}\right)=\begin{pmatrix}16 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad f_{xx}=16>0 \quad \wedge \quad \det(H)=64>0 \quad \Rightarrow \quad Min\left(2 \;\middle|\; 4 \;\middle|\; -\frac{56}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad H\left(f_{S_5}\right)=\begin{pmatrix}16 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(H)=-64<0 \quad \Rightarrow \quad Sattelpunkt$$

$$\Rightarrow \quad H\left(f_{S_6}\right)=\begin{pmatrix}16 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad f_{xx}=16>0 \quad \wedge \quad \det(H)=64>0 \quad \Rightarrow \quad Min\left(-2 \;\middle|\; 4 \;\middle|\; -\frac{56}{3}\right)$$

2.) **Ableitungen**

Bilden Sie bei den folgenden Funktionen jeweils die ersten partiellen Ableitungen:

a) $$f(x,y) = \frac{(4x-3)^2}{y^4}$$

__Lösung:__

$$f_x(x,y) = \frac{8(4x-3)}{y^4} \qquad\qquad f_y(x,y) = \frac{-4\cdot(4x-3)^2}{y^5}$$

b) $$f(x,y,z) = e^{x^2y}\cdot\left(x^3-4z^2+1\right)$$

__Lösung:__

$$f_x(x,y,z) = e^{x^2y}\cdot 2xy\cdot\left(x^3-4z^2+1\right) + e^{x^2y}\cdot 3x^2$$

$$f_y(x,y,z) = e^{x^2y}\cdot x^2\cdot\left(x^3-4z^2+1\right)$$

$$f_z(x,y,z) = e^{x^2y}\cdot(-8z)$$

3.) **Lineare Gleichungssysteme und Matrizengleichungen**

Gegeben sei folgendes LGS:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4t & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ t & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3t \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Lösen Sie das LGS mit einem Verfahren Ihrer Wahl.

<u>Lösung:</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & -4t & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ t & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3t \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{-16t^2-1} \begin{pmatrix} -25t-24 \\ 9t^2+24t-1 \\ 12t^3+7t+6 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -4t & 3 \\ -3t & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -4t & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ t & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-25t-24}{-16t^2-1} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 1 & -3t & 4 \\ t & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-16t^2-1} = \frac{9t^2+24t-1}{-16t^2-1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -4t & 6 \\ 1 & 0 & -3t \\ t & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-16t^2-1} = \frac{12t^3+7t+6}{-16t^2-1}$$

b) Für welche Werte von **t** hat das LGS eine **<u>eindeutige</u>** Lösung?

<u>Lösung:</u>

$$\rightarrow \quad -16t^2-1 = 0 \quad \rightarrow \quad t^2 = -\frac{1}{16}$$

$$\rightarrow \quad \forall t \in \Re \quad \text{existiert eine eindeutige Lösung}$$

c) Matrizengleichungen

(i) Welche beiden Fehler wurden beim Ausmultiplizieren der Klammer hier gemacht?

$$\left(A+3B\right)^2 \quad = \quad A^2+6AB+3B^2$$

Lösung: (1) Kommutativgesetz verwendet (2) Skalar 3 wurde nicht quadriert

(ii) Wie müsste der Klammerausdruck korrekt ausmultipliziert aussehen?

Lösung: $$\left(A+3B\right)^2 \quad = \quad A^2+3AB+3BA+9B^2$$

4.) **Optimum mit Nebenbedingungen**

Gegeben sei die Funktion $q\left(x,y\right) \quad = \quad 10x^{0,7}y^{0,3}$

Die Nebenbedingung lautet: $240 \quad = \quad 4x+8y$

Bestimmen Sie das maximal mögliche Produktionsergebnis q_{max} .

Lösung:

$$L\left(x,y,\lambda\right) \quad = \quad 10x^{0,7}y^{0,3}+\lambda\left(240-4x-8y\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}\left(x,y,\lambda\right) \quad = \quad 7\cdot\frac{y^{0,3}}{x^{0,3}}-4\lambda \quad \overset{!}{=} \quad 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \quad = \quad \frac{7}{4}\cdot\frac{y^{0,3}}{x^{0,3}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}\left(x,y,\lambda\right) \quad = \quad 3\cdot\frac{x^{0,7}}{y^{0,7}}-8\lambda \quad \overset{!}{=} \quad 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \quad = \quad \frac{3}{8}\cdot\frac{x^{0,7}}{y^{0,7}}$$

Austauschverhältnis:

$$\frac{7}{4}\cdot\frac{y^{0,3}}{x^{0,3}} \quad = \quad \frac{3}{8}\cdot\frac{x^{0,7}}{y^{0,7}} \quad \Rightarrow \quad y \quad = \quad \frac{3}{14}x$$

eingesetzt in NB:

$$240 \quad = \quad 4x+8y \quad \xrightarrow{y \;=\; \frac{3}{14}x} \quad 240 \quad = \quad 4x+8\cdot\frac{3}{14}x$$

$$\Rightarrow \quad 240 \quad = \quad \frac{40}{7}x \quad \Rightarrow \quad x=42 \quad \Rightarrow \quad y=9$$

$$\Rightarrow \quad q\left(42 \mid 9\right) \quad = \quad 10\cdot 42^{0,7}\cdot 9^{0,3} \quad \approx \quad 264{,}57$$

5.) **Extrema und Ortskurven**

Gegeben Sie folgende Funktion:

$$f_k(x) = -\frac{1}{2}x^3 - kx^2 + 10k^2x \quad mit\ k > 0$$

a) Ermitteln Sie die **Extremwertstellen** der Funktion.
Bitte mit vollständigem Nachweis (hinreichende Bedingung).

Lösung:

$$f_k'(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 2kx + 10k^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{10}{3}k \wedge x_2 = 2k$$

$$f_k''(x) = -3x - 2k$$

$$\xrightarrow{einsetzen} f_k''\left(-\frac{10}{3}k\right) = -3\cdot\left(-\frac{10}{3}k\right) - 2k = 8k > 0 \Rightarrow Min$$

$$\xrightarrow{einsetzen} f_k''(2k) = -3\cdot 2k - 2k = -8k < 0 \Rightarrow Max$$

b) Bestimmen Sie die **Ortskurve** der Wendepunkte.

Lösung:

$$f_k''(x) = -3x - 2k = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}k$$

$$f_k'''(x) = -3 \neq 0 \Rightarrow Wendestelle$$

$$Ortskurve:$$

$$x = -\frac{2}{3}k \rightarrow k = -\frac{3}{2}x \xrightarrow{einsetzen}$$

$$y = -\frac{1}{2}x^3 - \left(-\frac{3}{2}x\right)\cdot x^2 + 10\cdot\left(-\frac{3}{2}x\right)^2\cdot x$$

$$y = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^3 + 22{,}5x^3 = 23{,}5x^3$$