Klausur: Mathematik
am Montag, 24. März 2014

Jürgen Meisel

Zugelassene Hilfsmittel: Nicht grafikfähiger Taschenrechner; Formelsammlung
Bearbeitungszeit: 60 Minuten

1.) Extrema ohne Nebenbedingungen

15	

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = 3x^2 - 6xy - 12x + 4y^2 + 8$$

Bestimmen Sie Art und Lage der stationären Stelle von f.

Anmerkung: Bitte mit Berechnung des Funktionswertes!

Lösung:

$$\left.\begin{array}{lll} I.) & f_x(x,y) = & 6x - 6y - 12 \\ II.) & f_y(x,y) = & -6x + 8y \end{array}\right\} \xrightarrow{I+II} 2y - 12 = 0$$

$$\rightarrow \quad y = 6 \quad \rightarrow \quad x = 8$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\det(H)=12]{f_{xx}>0} Min(8 \mid 6 \mid -40)$$

2.) Ableitungen

15	

Bilden Sie jeweils die erste partielle Ableitung nach jeder Variablen:

a) $f(x,y) = e^{4y} - x^2y + x^3$

Lösung:

$$f_x(x,y) = -2xy + 3x^2$$

$$f_y(x,y) = 4e^{4y} - x^2$$

b) $$f(x,y,z) = \left(5y^{10}-3\right)^3 + \frac{x^4}{z^2}$$

Lösung:

$$f_x(x,y,z) = \frac{4x^3}{z^2}$$

$$f_y(x,y,z) = 3\left(5y^{10}-3\right)^2 \cdot 50y^9 = 150y^9 \cdot \left(5y^{10}-3\right)^2$$

$$f_z(x,y,z) = -\frac{2x^4}{z^3}$$

3.) Summen

15	

Berechnen Sie folgenden Ausdruck und geben Sie den Summenwert an:

$$\sum_{k=1}^{100} 3k^2 + 8k + 2 - \sum_{k=0}^{101} 10k + 4$$

Lösung:

$$\sum_{k=1}^{100}\left(3k^2+8k+2\right) - \sum_{k=0}^{101}\left(10k+4\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{100}\left(3k^2+8k+2\right) - 4 - \sum_{k=1}^{100}\left(10k+4\right) - 1.014$$

$$= \sum_{k=1}^{100}\left(3k^2-2k-2\right) - 1.018 = 3\sum_{k=1}^{100}k^2 - 2\sum_{k=1}^{100}k - 2\sum_{k=1}^{100}1 - 1.018$$

$$= 3\cdot\frac{100\cdot 101\cdot 201}{6} - 2\cdot\frac{100\cdot 101}{2} - 2\cdot 100 - 1.018$$

$$= 1.015.050 - 10.100 - 200 - 1.018 = 1.003.732$$

4.) Extrema unter Nebenbedingungen

15	

Berechnen Sie das Optimum der Funktion

$$f(x,y) = 4x^{0,25}y^{0,75}$$

unter folgender Nebenbedingung:

$$5.600 = 14x + 12y$$

Lösung:

$$L(x,y,k) = 4x^{0,25}y^{0,75} + k(5.600 - 14x - 12y)$$

$$\left.\begin{aligned} L_x(x,y,k) &= \frac{y^{0,75}}{x^{0,75}} - 14k = 0 \rightarrow k = \frac{1}{14}\cdot\frac{y^{0,75}}{x^{0,75}} \\ L_y(x,y,k) &= 3\cdot\frac{x^{0,25}}{y^{0,25}} - 12k = 0 \rightarrow k = \frac{1}{4}\cdot\frac{x^{0,25}}{y^{0,25}} \end{aligned}\right\}$$

$$\rightarrow \frac{1}{14}\cdot\frac{y^{0,75}}{x^{0,75}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{x^{0,25}}{y^{0,25}} \rightarrow y = \frac{7}{2}x$$

$$\xrightarrow{in\ NB} 5.600 = 14x + 12\cdot\frac{7}{2}x \rightarrow 5.600 = 56x$$

$$\rightarrow x = 100 \rightarrow y = 350 \rightarrow f(100 \mid 350) = 1.023,55$$

5.) Rechnen mit Matrizen und Determinanten

20	

Gegeben sind folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \\ k & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

a) $B\cdot(2A - E)$ b) B^2 c) B^3

d) $Det(B+E)$ e) $(B^2 + E^{100})^2$

Lösung:

a) $$B\cdot(2A-E) = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \\ k & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3k & -4k \\ 0 & 0 & 5k \\ 5k & 4k & 2k \end{pmatrix}$$

b) $$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k^2 \\ k^2 & 0 & 0 \\ 0 & k^2 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $$B^3 = \begin{pmatrix} k^3 & 0 & 0 \\ 0 & k^3 & 0 \\ 0 & 0 & k^3 \end{pmatrix}$$

d) $$Det\left(B+E\right) = Det\begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix} = k^3+1$$

e)

$$\left(B^2+E^{100}\right)^2 = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & k^2 \\ k^2 & 0 & 0 \\ 0 & k^2 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^2$$

$$\left(B^2+E^{100}\right)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k^2 \\ k^2 & 1 & 0 \\ 0 & k^2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & k^2 \\ k^2 & 1 & 0 \\ 0 & k^2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k^4 & 2k^2 \\ 2k^2 & 1 & k^4 \\ k^4 & 2k^2 & 1 \end{pmatrix}$$

6.) Lineare Gleichungssysteme und deren Lösungsverhalten | 20 | |

Gegeben sei die Matrix A_k und die Spaltenmatrix b_k :

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 2k & 4 \\ 1 & 1 & k-1 \end{pmatrix} \quad und \quad \vec{b}_k = \begin{pmatrix} -k \\ k^2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass die Determinante von A_k folgende Form annimmt:

$$Det(A_k) = 2(k^2+k-2)$$

Lösung: Einfaches Nachrechnen mittels Sarrus-Regel

b) Geben Sie an, für welche Werte von k, das LGS $A_k \cdot \vec{x} = \vec{b}_k$ eindeutig, mehrdeutig und lösbar ist.

Geben Sie im Falle einer mehrdeutigen Lösung auch den Lösungsvektor nach der freien Variablen **y** an.

Lösung:

$$Det(A_k) = 2(k^2+k-2) = 0 \rightarrow k_1 = 1 \vee k_2 = -2$$

Fall 1: k = 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{III-I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-y \\ y \\ 0,25-0,5y \end{pmatrix} \quad mit\ y \in \Re$$

Fall 2: k = -2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[III-I]{0,25 \cdot II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{III+3II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2y \\ y \\ 1+y \end{pmatrix} \quad mit\ y \in \Re$$