Klausur: Mathematik am Montag, 23. März 2015

Jürgen Meisel

Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner; Formelsammlung
Bearbeitungszeit: 60 Minuten

1.) Binomische Entwicklung

20	

a) Entwickeln Sie den Ausdruck nach dem Binomischen Lehrsatz und berechnen Sie die einzelnen Summanden:

$$\left(\frac{1}{2}x+4y\right)^5$$

b) Geben Sie die ersten 3 und die letzten 3 Summanden der binomischen Entwicklung des Ausdrucks $(a+2b)^{1.000}$ an.

Die Binomialkoeffizienten bitte ausrechnen, die Potenzen soweit berechnen wie sinnvoll.

2.) Ableitungen & Kurvendiskussion

20	

a) Bilden Sie jeweils die erste partielle Ableitung nach jeder Variablen:

$$f(x,y,z) \quad = \quad x^2ye^{4x^2}+\left(2y^4-z^3\right)^8$$

b) Gegeben sei die Funktionenschar

$$f_k(x) \quad = \quad -x^4-kx^2+2k^2 \quad mit\ k>0$$

(i) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion.

(ii) Ermitteln Sie die Extrema (mit Funktionswerten).

3.) Extrema unter Nebenbedingungen

20	

a) Berechnen Sie das Optimum der Funktion

$$f(x,y) \quad = \quad 9x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$$

unter folgender Nebenbedingung: $120 \quad \geq \quad 2x+5y$

b) Nun ist bei gleichen Angaben die kostenminimale Kombination gesucht, wenn 180 ME (Produktionsmenge) hergestellt werden sollen. Ermitteln Sie die entsprechende Wertekombination und berechnen Sie dann auch die minimalen Kosten.

4.) Extrema ohne Nebenbedingungen & geometrische Darstellung

20	

a) Bestimmen Sie die stationären Stellen und untersuchen Sie diese auf Extremwerteigenschaft.

Bitte bestimmen Sie für die Extrema auch die zugehörigen Funktionswerte.

$$f(x,y) \quad = \quad \frac{1}{3}x^3 - x + y^2 + 10y$$

b) Es sei die Produktionsfunktion $q(x,y)$ wie folgt gegeben:

$$q(x,y) \quad = \quad 3 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$$

Wie groß muss der Wert für y sein, wenn x = 10 gilt und ein Produktionsvolumen von q = 60 vorliegt?

5.) Matrizen bzw. LGS und deren Lösungsverhalten

20	

Gegeben sei die Matrix A_k und die Spaltenmatrix b_k :

$$A_k \quad = \begin{pmatrix} 1 & k-1 & 0 \\ 0 & k & 2 \\ 1 & 1 & k+1 \end{pmatrix} \qquad und \qquad \vec{b_k} \quad = \begin{pmatrix} k \\ 3k \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass die Determinante von A_k folgende Form annimmt:

$$Det(A_k) \quad = \quad k^2 + 3k - 4$$

b) Geben Sie an, für welche Werte von k, das LGS $A_k \cdot \vec{x} = \vec{b_k}$ eindeutig, mehrdeutig und lösbar ist.

Geben Sie im Falle einer mehrdeutigen Lösung auch den Lösungsvektor nach der freien Variablen y an.

Lösung Klausur

Aufgabe 1: Lösung

a) $$\left(\frac{1}{2}x+4y\right)^5 = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}x\right)^5 + \binom{5}{1}\left(\frac{1}{2}x\right)^4(4y)^1 + \binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}x\right)^3(4y)^2$$
$$+ \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}x\right)^2(4y)^3 + \binom{5}{4}\left(\frac{1}{2}x\right)^1(4y)^4 + \binom{5}{5}(4y)^5$$
$$= \frac{1}{32}x^5 + \frac{5}{4}x^4y + 20x^3y^2 + 160x^2y^3 + 640xy^4 + 1024y^5$$

b) $$(a+2b)^{1000} = \binom{1000}{0}a^{1000} + \binom{1000}{1}a^{999}\cdot 2b + \binom{1000}{2}a^{998}\cdot 4b^2 + \binom{1000}{3}a^{997}16b^3$$
$$+ \ldots + \binom{1000}{997}a^3(2b)^{997} + \binom{1000}{998}a^2(2b)^{998} + \binom{1000}{999}a(2b)^{999}$$
$$+ \binom{1000}{1000}(2b)^{1000}$$
$$= a^{1000} + 2000a^{999}\cdot b + 1.998.000a^{998}b^2 + 2.658.672.000a^{997}b^3$$
$$+ \ldots + 166.167.000a^3\cdot(2b)^{997} + 499.500a^2(2b)^{998} + 1000a(2b)^{999}$$
$$+ (2b)^{1000}$$

Aufgabe 2: Lösung

a) $$f(x,y,z) = x^2y\,e^{4x^2} + (2y^4-z^3)^8$$
$$f_x = 2xye^{4x^2} + 8x^3ye^{4x^2}$$
$$f_y = x^2e^{4x^2} + 8(2y^4-z^3)^7\cdot 8y^3$$
$$f_z = 8(2y^4-z^3)^7\cdot(-3z^2)$$

b) $$f_k(x) = -x^4-kx^2+2k^2 \qquad k>0$$

NS: $-u^2-ku+2k^2=0 \rightsquigarrow u_{1/2} = \dfrac{k\pm\sqrt{k^2+8k^2}}{-2} = \dfrac{k\pm 3k}{-2}$ $\begin{cases} u_1=-2k \\ u_2=k \end{cases}$

$|x| = \sqrt{k}$ $\qquad u_1$ entfällt

Extrema: $f_k'(x) = -4x^3-2kx = 0 \rightsquigarrow x(-4x^2-2k)=0$

$x_1=0 \qquad x^2=-\frac{1}{2}k \quad ⚡ \ (k>0$

$$f_k''(x) = -12x^2-2k$$
$$f_k''(0) = -2k < 0 \Rightarrow HP(0/2k^2)$$

Aufgabe 3: Lösung

a) $f(x,y) = 9 \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}}$ mit $2x + 5y \leq 120$

$$L(x,y,k) = 9x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}} + k(120 - 2x - 5y)$$

$$\left.\begin{array}{ll} L_x = 3\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}} - 2k = 0 \\ L_y = 6\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{3}} - 5k = 0 \end{array}\right\} y = \frac{4}{5}x$$

$$\Rightarrow 120 = 6x \rightsquigarrow x = 20 \rightsquigarrow y = 16 \rightsquigarrow f(20/16) \approx 155{,}12$$

b) $y = \frac{4}{5}x$ gegeben $\rightsquigarrow$ NB ist jetzt die Produktionsfunktion

$$180 = 9 \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}} \rightsquigarrow 20 = x \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}} \rightsquigarrow x = 23{,}21$$

$$y = 18{,}57$$

Budgetminimum: $2 \cdot 23{,}21 + 5 \cdot 18{,}57 = 139{,}27$

Aufgabe 4: Lösung

a) $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - x + y^2 + 10y$

$$\left.\begin{array}{ll} f_x = x^2 - 1 = 0 \rightsquigarrow x_{1/2} = \pm 1 \\ f_y = 2y + 10 = 0 \rightsquigarrow y = -5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} S_1\,(1/-5/z_1) \\ S_2\,(-1/-5/z_2) \end{array}$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow H_{S_1}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{pos. definit} \rightsquigarrow \text{MIN}\left(1/-5/-25\tfrac{2}{3}\right)$$

$$\rightsquigarrow H_{S_2}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{indefinit} \rightsquigarrow \text{SP}\left(-1/-5/-24\tfrac{1}{3}\right)$$

b) $f(x,y) = 3 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$

(i) $60 = 3 \cdot \sqrt{10 \cdot y} \rightsquigarrow 10y = 400 \rightsquigarrow y = 40$

Aufgabe 5: Lösung

a) $\text{Det}\begin{pmatrix} 1 & k-1 & 0 \\ 0 & k & 2 \\ 1 & 1 & k+1 \end{pmatrix} = k^2+k+2k-2+0-0-2-0$

$= k^2+3k-4$ #

b) $k^2+3k-4=0 \Rightarrow k_1=1 \lor k_2=-4$

eindeutig lösbar $\Leftrightarrow k \in \mathbb{R}\setminus\{-4;1\}$

Probe $k=1$:

$$\begin{array}{c|ccc|c} \text{I} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \text{II} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \text{III} & 1 & 1 & 2 & 2 \end{array} \xRightarrow{\text{III}-\text{I}} \begin{array}{c|ccc|c} \text{I} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \text{II} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \text{III} & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Widerspruch $\Rightarrow$ keine $\mathbb{L}$ für $k=1$

Probe $k=-4$:

$$\begin{array}{c|ccc|c} \text{I} & 1 & -5 & 0 & -4 \\ \text{II} & 0 & -4 & 2 & -12 \\ \text{III} & 1 & 1 & -3 & 2 \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ -\frac{1}{2}\text{II} \end{array} \xRightarrow{\text{III}-\text{I}} \begin{array}{c|ccc|c} \text{I} & 1 & -5 & 0 & -4 \\ \text{II} & 0 & 2 & -1 & 6 \\ \text{III} & 0 & 6 & -3 & 6 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Widerspruch $\Rightarrow$ keine $\mathbb{L}$ für $k=-4$