Klausur: Mathematik
am Mittwoch, 30. März 2016

Jürgen Meisel

Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner; Formelsammlung
Bearbeitungszeit: 60 Minuten

1.) Ökonomische Anwendung zur Differentialrechnung (1 Variable)

25	

Gegeben sind die PAF $p_N(x) = 0,05\cdot(x-80)^2$ und

die Kostenfunktion des Monopolisten mit

$$K(x) = 0,01x^3 - x^2 + 40x + 300.$$

a) Berechnen Sie den Höchstpreis und die Sättigungsmenge.

b) Wie lauten die Erlösfunktion und ihr Maximum?

c) Berechnen Sie Gewinnschwelle und Gewinngrenze.

d) Wie lauten die gewinnmaximale Menge und der Cournot-Punkt?

Lösung:

a) Höchstpreis: $p_N(0) = 0,05\cdot(0-80)^2 = 320$

Sättigungsgrenze: $p_N(x) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow 0,05\cdot(x-80)^2 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = 80$

b)

$$E(x) = x\cdot p_N(x) = x\cdot 0,05\cdot(x-80)^2 = 0,05x^3 - 8x^2 + 320x$$

$$E'(x) = 0,15x^2 - 16x + 320 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x_1 = 80 \vee x_2 = \frac{80}{3}$$

$$E''(x) = 0,3x - 16 \Rightarrow E''\left(\frac{80}{3}\right) = -8 < 0 \Rightarrow Max$$

$$E\left(\frac{80}{3}\right) = 3.792,59$$

c) Gewinnschwelle und Gewinngrenze

$$K(x) = E(x) \Rightarrow 0,01x^3 - x^2 + 40x + 300 = 0,05x^3 - 8x^2 + 320x$$

$$\Rightarrow G(x) = 0,04x^3 - 7x^2 + 280x - 300 \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 1,10\,(Gewinnschwelle) \vee x_2 = 59,53\,(Gewinngrenze)$$

Anmerung:

x_3 ist außerhalb des Definitionsbereichs,

d.h. rechts von der Sättigungsgrenze des Marktes

d) gewinnmaximale Menge und der Cournot-Punkt

$$G(x) = 0{,}04x^3 - 7x^2 + 280x - 300 \Rightarrow G'(x) = 0{,}12x^2 - 14x + 280 \overset{!}{=} 0$$

$$\rightarrow x_1 = 25{,}631 \quad [und \quad x_2 = 91{,}036]$$

Anmerkung:

x_2 ist außerhalb des Definitionsbereichs,

d.h. rechts von der Sättigungsgrenze des Marktes

$$G''(x) = 0{,}24x - 14 \rightarrow G''(25{,}631) = -7{,}85 < 0 \Rightarrow Max$$

$$p(25{,}631) = 147{,}80 \Rightarrow C(25{,}631 \mid 147{,}80)$$

2.) Extrema ohne Nebenbedingungen

25	

<u>Teil 1:</u>

Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = x^3 + y^3 - 27x - 12y$

a) Bestimmen Sie die stationären Stellen und untersuchen Sie diese auf Extremwerteigenschaft.

b) Berechnen Sie (nur) für die Extrema auch die zugehörigen Funktionswerte.

Lösung:

$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y) &= 3x^2 - 27 \rightarrow |x| = 3 \\ f_y(x,y) &= 3y^2 - 12 \rightarrow |y| = 2 \end{aligned}\right\} S(\pm 3 \quad \pm 2 \quad f_{1-4})$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow Max(-3 \quad -2 \quad 70) \quad und \quad Min(3 \quad 2 \quad -70)$$

Teil 2:

Gegeben sei nun folgende Funktion $g(x,y) \quad = \quad 4x^2+2y^2-12x+4xy$

a) Bestimmen Sie die stationäre Stelle und untersuchen Sie diese auf Extremwerteigenschaft.

b) Berechnen Sie (nur) für die Extrema auch die zugehörigen Funktionswerte.

Lösung:

$$g_x(x,y) \quad = \quad 8x-12+4y \quad \xrightarrow{y=-x} \quad x=3 \quad \to \quad y=-3$$
$$g_y(x,y) \quad = \quad 4y+4x \quad \to \quad y=-x$$

$$H(f) \quad = \quad \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \to \quad Min\begin{pmatrix} 3 & -3 & -18 \end{pmatrix}$$

3.) Übergangsmatrizen und Rechenoperationen mit Matrizen | 25 | |

Teil 1:

In einem Radiointerview, das leider immer wieder durch unverständliche Textpassagen unterbrochen wird, erklärte der Marktforschungsexperte Denni Diesel:

„Der Markt für Treibstoffe ist vollkommen unter den Konzernen Asso, Sholl und Ural aufgeteilt. Im Februar 2016 hatte Asso einen Marktanteil von 32 %, Sholl einen von 28 % und … . Dabei wechseln die Verbraucher monatlich ihre Vorlieben: 80 % der Kunden von Asso tanken im nächsten Monat wieder bei Asso, … , 10 % bei Ural.
Von den Sholl-Kunden bleiben 70 % ihrer Marke treu, 15 % wechseln zu Asso, … .
Am treuesten sind die Kunden von Ural: 90 % bleiben bei Ural, der Rest wechselt je zur Hälfte zu den beiden Konkurrenten.

a) Erstellen Sie die zugehörige Übergangsmatrix U, die den Wechsel des Konsumentenverhaltens von einem Monat zum nächsten darstellt.

b) Geben sie zudem die derzeitige Markverteilung an.

c) Wie werden die Marktanteile in den kommenden beiden Monaten voraussichtlich verteilt sein?

d) Welche Marktanteile hatten die drei Konzerne im Januar?

e) Welche langfristige Verteilung der Marktanteile im Sinne eines statischen Gleichgewichts ist zu erwarten?

Lösung:

$$U = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,15 & 0,05 \\ 0,1 & 0,7 & 0,05 \\ 0,1 & 0,15 & 0,9 \end{pmatrix} \qquad p_{febr.} = \begin{pmatrix} 0,32 \\ 0,28 \\ 0,4 \end{pmatrix}$$

$$p_{maerz} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,15 & 0,05 \\ 0,1 & 0,7 & 0,05 \\ 0,1 & 0,15 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,32 \\ 0,28 \\ 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,318 \\ 0,248 \\ 0,434 \end{pmatrix}$$

$$p_{april} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,15 & 0,05 \\ 0,1 & 0,7 & 0,05 \\ 0,1 & 0,15 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,318 \\ 0,248 \\ 0,434 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3133 \\ 0,2271 \\ 0,4596 \end{pmatrix}$$

p_{januar}

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,15 & 0,05 \\ 0,1 & 0,7 & 0,05 \\ 0,1 & 0,15 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,32 \\ 0,28 \\ 0,4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,31606 \\ 0,32953 \\ 0,35440 \end{pmatrix}$$

$Statisches\ Gleichgewicht:$

$$Ansatz: \quad U \cdot x = x \quad \rightarrow \quad (U - E) \cdot x = 0 \quad und\ Einszeile$$

$$\begin{pmatrix} -0,2 & 0,15 & 0,05 \\ 0,1 & -0,3 & 0,05 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Teil 2:

Gegeben sei folgende Matrix: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

a) A^2 b) A^4 c) A^{10}

Lösung:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -6 & 16 \end{pmatrix} \qquad A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ -120 & 256 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = A^4 \cdot A^4 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1.024 & 0 \\ -523.776 & 1.048.476 \end{pmatrix}$$

4.) Matrizen bzw. LGS und deren Lösungsverhalten

25	

<u>Teil 1:</u>

Zur Herstellung von drei Zwischenprodukten Z_1, Z_2 und Z_3 werden in einem Unternehmen drei Rohstoffe R_1, R_2, und R_3 benötigt.
Aus den Zwischenprodukten werden drei Endprodukte E_1 , E_2 und E_3 hergestellt.

Der Bedarf an Rohstoffen und Zwischenprodukten (in ME) zur Herstellung von jeweils einer ME auf der nachgelagerten Produktionsstufe kann den folgenden Darstellungsformen entnommen werden.

$$M_{RZ} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad M_{EZ} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 2 & 8 & 7 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Die Unternehmung hatte Endprodukte im Mengenverhältnis 5 : 2 : 3 gefertigt und dabei 7.080 ME von R_2 verarbeitet.

Wie viele ME der anderen beiden Materialien wurden benötigt und wie viele der jeweiligen Endprodukte wurden jeweils hergestellt?

Lösung:

Ansatz :

$$M_{RZ} \cdot M_{EZ} \cdot \begin{pmatrix} 5x \\ 2x \\ 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 2 & 8 & 7 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5x \\ 2x \\ 3x \end{pmatrix}$$

$$M_{RZ} \cdot M_{EZ} \cdot \begin{pmatrix} 5x \\ 2x \\ 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 33 & 26 \\ 31 & 47 & 35 \\ 24 & 40 & 31 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5x \\ 2x \\ 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 229x \\ 354x \\ 293x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 7.080 \\ c \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad x = 20 \xrightarrow{\text{Rohstoffe}} \begin{pmatrix} 4.580 \\ 7.080 \\ 5.860 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Endprodukte}} \begin{pmatrix} 100 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$

Teil 2:

Gegeben sei die Matrix A und der Vektor d:

$$A_t = \begin{pmatrix} -2 & t-2 & t^2 \\ -1 & -1 & 3t \\ t & -t^2 & 5t+2 \end{pmatrix} \quad und \quad d_t = \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ -5t+2 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass die Determinante von A_t folgende Form annimmt:

$$Det(A_t) = t^4 - 2t^3 - t^2 + 2t$$

Lösung: Nachrechnen mittels Sarrus-Regel

b) Geben Sie an, für welche Werte von **t** das LGS $A_t \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = d_t$

(i) eindeutig lösbar,

(ii) mehrdeutig lösbar und

(iii) unlösbar ist.

c) Lösen Sie das System für **t = 0 und t = 1.**

Lösung:

$$Det(A_t) = t\left(t^3 - 2t^2 - t + 2\right) = 0 \rightarrow t \in \{-1; 0; 1; 2\}$$

$$A_{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow keine\ Lösung$$

$$A_0 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k \\ k \\ 1 \end{pmatrix} \quad mit\ k \in \Re$$

$$A_1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2k \\ 2+5k \\ k \end{pmatrix} \quad mit\ k \in \Re$$

$$A_2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0,5k \\ k \\ -0,5+0,25k \end{pmatrix} \quad mit\ k \in \Re$$

5.) Extrema unter Nebenbedingungen | 25 | |

a) Berechnen Sie das Optimum der Funktion

$$f(x,y) = 20 \cdot x^{0,75} y^{0,25}$$

unter folgender Nebenbedingung: $5x + 8y \leq 1.600$

b) Bestimmen Sie auch den zugehörigen Funktionswert der Funktion $f(x,y)$

c) Ermitteln Sie den Wert des Lagrangeparameters im Optimum und erläutern Sie dessen ökonomische Aussagekraft im Rahmen der Aufgabenstellung.
Zeigen Sie diesen Sachverhalt, indem Sie eine Beispielrechnung durchführen.

Lösung:

$$L(x,y,\lambda) = 20 \cdot x^{0,75} y^{0,25} + \lambda(1.600 - 5x - 8y)$$

$$\left.\begin{aligned} L_x(x,y,\lambda) &= 15 \cdot \frac{y^{0,25}}{x^{0,25}} - 5\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 3 \cdot \frac{y^{0,25}}{x^{0,25}} \\ L_y(x,y,\lambda) &= 5 \cdot \frac{x^{0,75}}{y^{0,75}} - 8\lambda = 0 \rightarrow \lambda = \frac{5}{8} \cdot \frac{x^{0,75}}{y^{0,75}} \end{aligned}\right\} y = \frac{5}{24} x$$

$$1600 = 5x + 8 \cdot \frac{5}{24} x \rightarrow 1600 = \frac{20}{3} x \rightarrow x = 240 \rightarrow y = 50$$

$$f(240,50) = 20 \cdot 240^{0,75} \cdot 50^{0,25} = 3.242,88$$

$$\lambda = 3 \cdot \frac{50^{0,25}}{240^{0,25}} = 2,0268$$

Bei einer Erhöhung des Budgets um 1 GE,
wird der Output sich um 2,0268 ME erhöhen.

Probe:

$$1601 = \frac{20}{3} x \rightarrow x = 240,15 \rightarrow y = 50,03125$$

$$f(240,15/50,03125) = 20 \cdot 240,15^{0,75} \cdot 50,03125^{0,25} = 3.244,91$$

$$\Delta f \approx 3.244,91 - 3.242,88 \approx 2,03$$