Klausur: Mathematik am Dienstag, den 30. März 2010

Jürgen Meisel

Zugelassene Hilfsmittel: Nicht grafikfähiger Taschenrechner; Formelsammlung
Bearbeitungszeit: 60 Minuten

1.) **Extrema ohne Nebenbedingungen**

Ermitteln Sie die stationären Stellen der Funktion

$$f(x,y) \quad = \quad x^4 - x^2\left(\frac{3}{2}+y\right) + y^2 + 4$$

und untersuchen Sie diese Stellen auf ihre Extremwerteigenschaft.

Anmerkung: Eine Berechnung der Funktionswerte soll nicht erfolgen!

<u>Lösung:</u>

$$I.)\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 2x\left(\frac{3}{2}+y\right) \overset{!}{=} 0 \quad \xrightarrow{II\ in\ I} \quad 4x^3 - 3x - 2x\cdot\frac{1}{2}x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4x^3 - x^3 - 3x = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^3 - 3x = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad und \quad x_2 = 1 \quad und \quad x_3 = -1$$

$$II.)\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x^2 + 2y \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}x^2$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = 0 \quad und \quad y_2 = \frac{1}{2} \quad und \quad y_3 = \frac{1}{2}$$

Es resultieren drei stationäre Stellen:

$$S_1(0 \mid 0 \mid 4) \quad und \quad S_2\left(1 \,\middle|\, \frac{1}{2} \,\middle|\, 3{,}25\right) \quad und \quad S_3\left(-1 \,\middle|\, \frac{1}{2} \,\middle|\, 3{,}25\right)$$

$$Hesse-Matrix: \quad H(f) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2y - 3 & -2x \\ -2x & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad H(f_{S_1}) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(H) = -6 < 0$$

$$\Rightarrow \quad Sattelpunkt$$

$$\Rightarrow \quad H(f_{S_2}) = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad f_{xx} = 8 > 0 \quad \wedge \quad \det(H) = 12 > 0$$

$$\Rightarrow \quad Min\left(1 \,\middle|\, \frac{1}{2} \,\middle|\, 3{,}25\right)$$

$$\Rightarrow \quad H(f_{S_3}) = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad f_{xx} = 8 > 0 \quad \wedge \quad \det(H) = 12 > 0$$

$$\Rightarrow \quad Min\left(-1 \,\middle|\, \frac{1}{2} \,\middle|\, 3{,}25\right)$$

2.) **Integralrechnung**

Gegeben seien die Nachfragefunktion $p_N(x) = \frac{8}{x+2} + 6$

und die Angebotsfunktion $p_A(x) = \frac{1}{k}x^2 + 1$.

a) Ermitteln Sie den Wert für den Parameter k, wenn der Gleichgewichtspreis bei $p_0 = 7$ liegt.

<u>Lösung:</u>

$$p_N(x): \quad \frac{8}{x+2} + 6 = 7 \xrightarrow{-6} \frac{8}{x+2} = 1$$

$$\xrightarrow{\cdot(x+2)} 8 = x+2 \xrightarrow{-2} x = 6$$

$$p_A(x): \quad 7 = \frac{1}{k} \cdot 6^2 + 1 \Rightarrow k = 6$$

b) Berechnen Sie die **<u>Produzentenrente</u>**.

<u>Lösung:</u>

$$Bekannt: \quad M(6 \mid 7)$$

$$P_R = 6 \cdot p_A(6) - \int_0^6 \left(\frac{1}{6}x^2 + 1 \right) dx = 42 - \left[\frac{1}{18}x^3 + x \right]_0^6$$

$$P_R = 42 - 12 - 6 = 24$$

3.) **Stationäre Stelle unter Nebenbedingung**

Bestimmen Sie die stationäre Stelle der Funktion $f(x,y)=\sqrt{2x^2+y^2}$ unter der Nebenbedingung $x+y=12$.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
L(x,y,\lambda) &= \sqrt{2x^2+y^2}+\lambda(12-x-y)\\
\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) &= \frac{4x}{2\sqrt{2x^2+y^2}}-\lambda \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2+y^2}}\\
\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) &= \frac{2y}{2\sqrt{2x^2+y^2}}-\lambda \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2y}{2\sqrt{2x^2+y^2}}
\end{aligned}
$$

Austauschverhältnis:

$$\frac{4x}{2\sqrt{2x^2+y^2}} = \frac{2y}{2\sqrt{2x^2+y^2}} \Rightarrow y = 2x$$

eingesetzt in NB:

$$12 = x+y \xrightarrow{y\ =\ 2x} 12 = x+2x$$

$$\Rightarrow 12 = 3x \Rightarrow x=4 \Rightarrow y=8$$

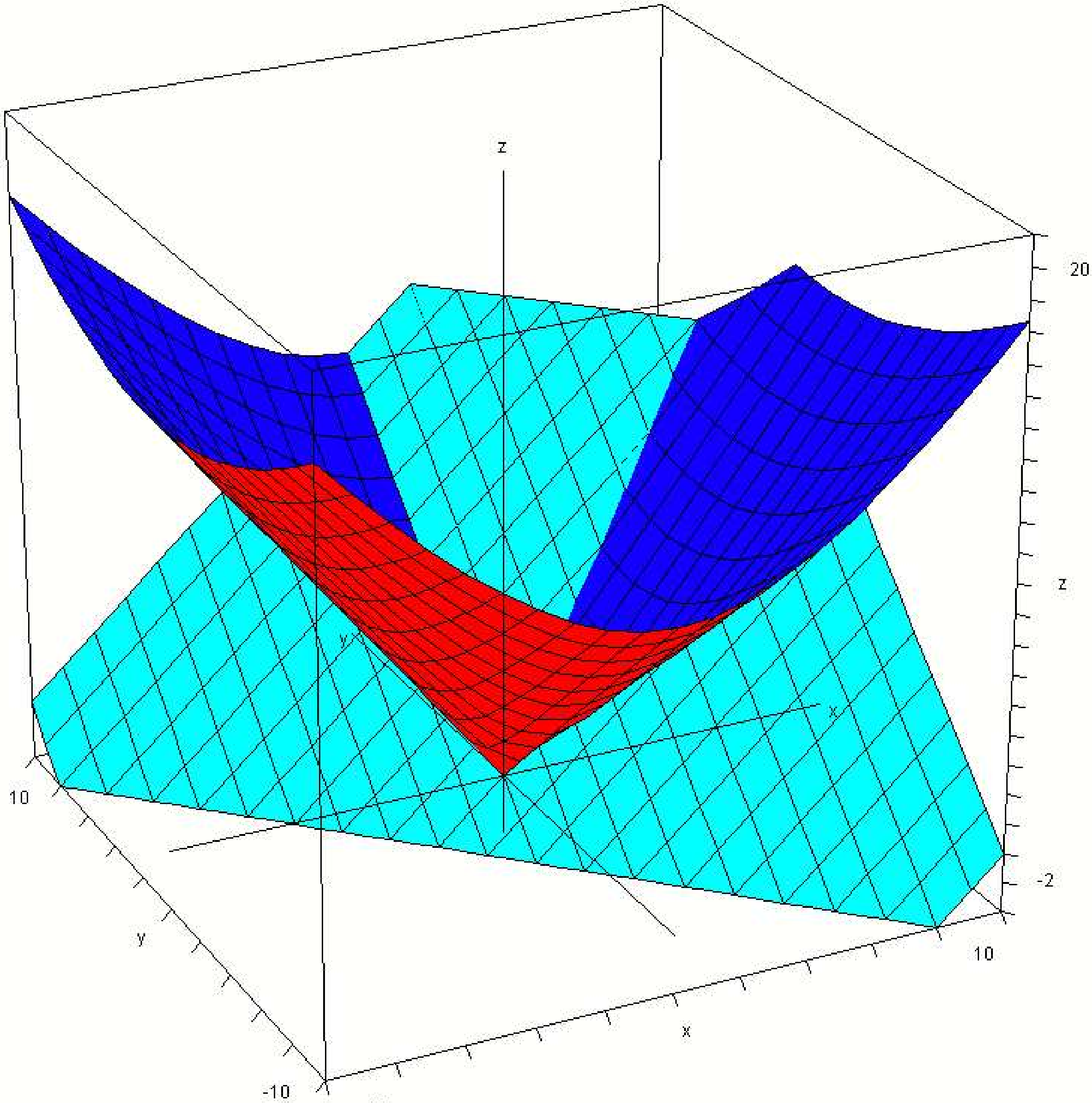
$$\Rightarrow f(4\mid 8) = \sqrt{2\cdot 4^2+8^2} \approx 9{,}8$$

Zusatz => nicht in Klausur gefordert:

Art der stationären Stelle mittels Hesse-Matrix

$$H(L) = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{x\lambda}\\ L_{yx} & L_{yy} & L_{y\lambda}\\ L_{\lambda x} & L_{\lambda y} & L_{\lambda\lambda}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2y^2}{(2x^2+y^2)^{1,5}} & \frac{-2xy}{(2x^2+y^2)^{1,5}} & -1\\ \frac{-2xy}{(2x^2+y^2)^{1,5}} & \frac{2x^2}{(2x^2+y^2)^{1,5}} & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$H(L) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{18} & -\frac{\sqrt{6}}{36} & -1\\ -\frac{\sqrt{6}}{36} & \frac{\sqrt{6}}{72} & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{Det} -\frac{1}{8}\sqrt{6}<0 \Rightarrow \mathit{Minimum}$$


z
20
z
-2
10
y
-10
x
10
y
x

4.) **Berechnungen mit Matrizen**

a) Bestimmen Sie die Lösung des folgenden LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ in Abhängigkeit der Variablen z:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$Ansatz: \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Gauß–Verfahren}]{\text{Lösung mittels}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + \frac{6}{7} z \\ 2 - \frac{2}{7} z \\ z \end{pmatrix}$$

mögliche Vorgehensweise beim Gauß-Verfahren:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 2x_3 &= 2 \quad (1) \\ x_1 + 3x_2 &= 8 \quad (2) \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 10 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 1/2\, x_2 - x_3 &= 1 \quad (1) \\ x_1 + 3x_2 &= 8 \quad (2) \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 10 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 1/2\, x_2 - x_3 &= 1 \quad (1) \\ 7/2\, x_2 + x_3 &= 7 \quad (2) \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 10 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 1/2\, x_2 - x_3 &= 1 \quad (1) \\ 7/2\, x_2 + x_3 &= 7 \quad (2) \\ 7/2\, x_2 + x_3 &= 7 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 1/2\, x_2 - x_3 &= 1 \quad (1) \\ x_2 + 2/7\, x_3 &= 2 \quad (2) \\ 7/2\, x_2 + x_3 &= 7 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 6/7\, x_3 &= 2 \quad (1) \\ x_2 + 2/7\, x_3 &= 2 \quad (2) \\ 7/2\, x_2 + x_3 &= 7 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 6/7\, x_3 &= 2 \quad (1) \\ x_2 + 2/7\, x_3 &= 2 \quad (2) \\ 0 &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

Unendlich viele Lösungen: 1 Parameter wählbar

$x_1 = 2 + 6/7\, x_3$

$x_2 = 2 - 2/7\, x_3$

x_3 beliebig wählbar

b) Welchen Wert hat die Determinante von A?
Ergebnis bitte mit Begründung oder mittels Rechenweg.

Lösung: Der Wert der Determinante von A muss 0 sein, da die Zeilen des LGS linear abhängig sind.

5.) **Wachstumsvorgänge**

Eine Tierpopulation hat sich von ihrem Anfangsbestand innerhalb von 5 Jahren auf 300 Tiere vergrößert.
Die Entwicklung des Tierbestandes entspricht der Gesetzmäßigkeit

$$b(t) = \frac{3.000}{2+13\cdot e^{-1.500\lambda t}}$$

a) Wie groß war der Anfangsbestand?

Lösung:

$$b(0) = \frac{3.000}{2+13\cdot e^{-1.500\lambda\cdot 0}} = \frac{3.000}{2+13\cdot e^{0}} = \frac{3.000}{15} = 200$$

b) Bestimmen Sie den Wert für λ auf 8 Dezimalstellen genau!

Lösung:

$$b(5) = \frac{3.000}{2+13\cdot e^{-1.500\lambda\cdot 5}} = 300 \xrightarrow{:3.000} \frac{1}{2+13\cdot e^{-7.500\lambda}} = \frac{1}{10}$$

$$\xrightarrow{Kehrwert} 2+13\cdot e^{-7.500\lambda} = 10 \xrightarrow[:13]{-2} e^{-7.500\lambda} = \frac{8}{13}$$

$$\xrightarrow{\ln} -7.500\lambda = \ln\left(\frac{8}{13}\right) \xrightarrow{:(-7.500)} \lambda = \frac{1}{-7.500}\cdot\ln\left(\frac{8}{13}\right)$$

$$\Rightarrow \lambda = 0,00006473$$

c) Ermitteln Sie die Obergrenze der Population.

Lösung:

$$\lim_{t\to\infty} b(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{3.000}{2+13\cdot e^{-1.500\lambda t}} \to \frac{3.000}{2+13\cdot e^{"-\infty"}} \to \frac{3.000}{2+13\cdot 0} \to 1.500$$

d) Nach welchem Zeitraum wird sich der Bestand von 300 verdoppelt haben?

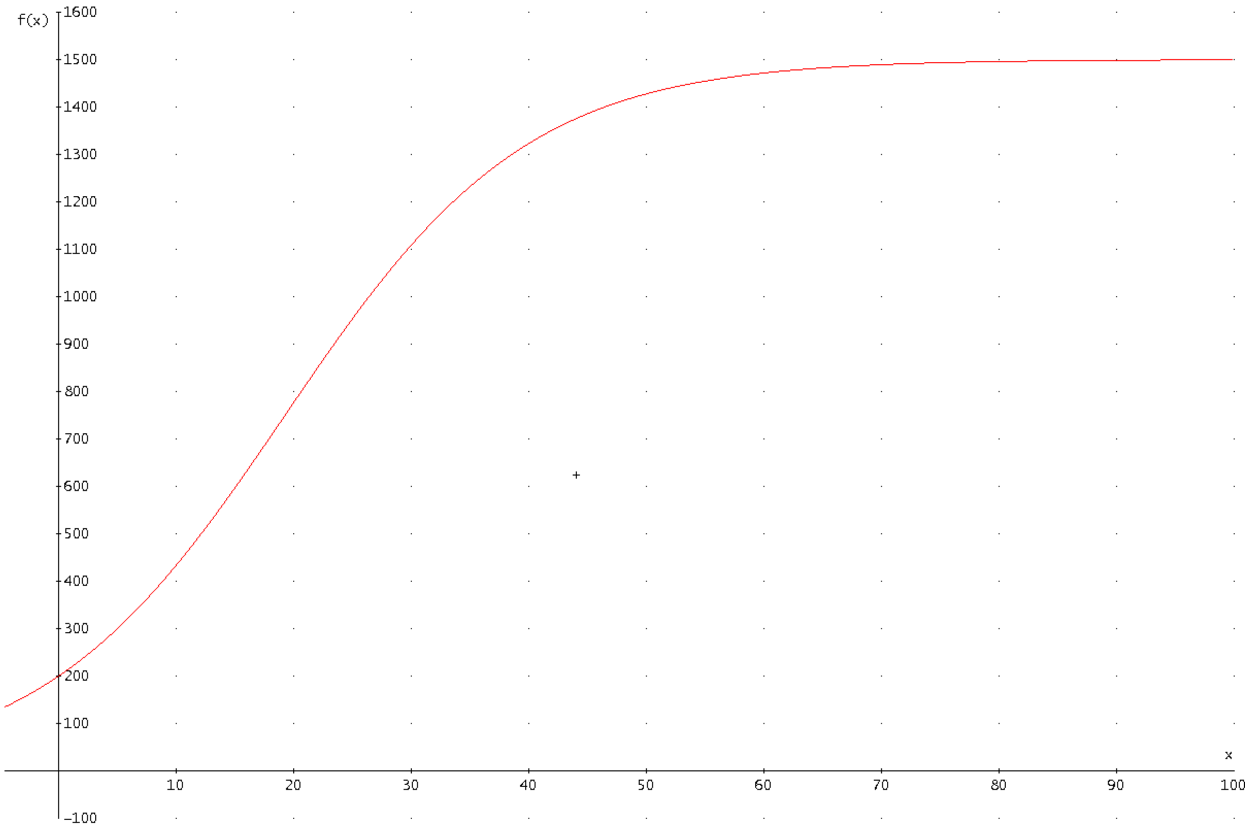
Lösung:

$$600 = \frac{3.000}{2+13\cdot e^{-0,0971t}} \xrightarrow{:3.000} \frac{1}{2+13\cdot e^{-0,0971t}} = \frac{1}{5}$$

$$\xrightarrow{Kehrwert} 2+13\cdot e^{-0,0971t} = 5 \xrightarrow[:13]{-2} e^{-0,0971t} = \frac{3}{13}$$

$$\xrightarrow{\ln} -0,0971t = \ln\left(\frac{3}{13}\right) \xrightarrow{:(-0,0971)} t = \frac{1}{-0,0971}\cdot\ln\left(\frac{3}{13}\right)$$

$$\Rightarrow t = 15,1\left[Jahre\right]$$



f(x)
1600
1500
1400
1300
1200
1100
1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
−100
x
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

6.) **Rechen- und Ableitungstechnik**

a) Bilden Sie die jeweils ersten partiellen Ableitungen der folgenden Funktion:

$$f_k(x,y,z) \quad = \quad \frac{1}{4k}x^k y^{2k} + yz^{3k}$$

Lösung:

$$\frac{\partial f_k(x,y,z)}{\partial x} \quad = \quad \frac{1}{4}x^{k-1}y^{2k}$$

$$\frac{\partial f_k(x,y,z)}{\partial y} \quad = \quad \frac{1}{2}x^k y^{2k-1} + z^{3k}$$

$$\frac{\partial f_k(x,y,z)}{\partial z} \quad = \quad 3kyz^{3k-1}$$

b) Berechnen Sie den Ausdruck und vereinfachen Sie ihn so weit wie möglich:

$$\left(\frac{2}{3}k+\frac{3}{4}\right)^6$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{3}k+\frac{3}{4}\right)^6 \quad = \quad & \binom{6}{0}\left(\frac{2}{3}k\right)^6\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^0+\binom{6}{1}\left(\frac{2}{3}k\right)^5\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^1+\binom{6}{2}\left(\frac{2}{3}k\right)^4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 \\ & +\binom{6}{3}\left(\frac{2}{3}k\right)^3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3+\binom{6}{4}\left(\frac{2}{3}k\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4+\binom{6}{5}\left(\frac{2}{3}k\right)^1\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^5 \\ & +\binom{6}{6}\left(\frac{2}{3}k\right)^0\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^6\end{aligned}$$

$$\left(\frac{2}{3}k+\frac{3}{4}\right)^6 \quad = \quad \frac{64}{729}k^6+\frac{16}{27}k^5+\frac{5}{3}k^4+\frac{5}{2}k^3+\frac{135}{64}k^2+\frac{243}{256}k+\frac{729}{4.096}$$

7.) **Finanzmathematik**

(i) Ein Kapital von 8.000,00 € wird 5 Jahre lang mit 5 %, danach 4 Jahre mit 6 % und anschließend nach 3 weitere Jahre mit 7 % verzinst.

a) Auf welchen Betrag ist es angewachsen?

Lösung:

$$K_{12} \quad = \quad 8.000,00 \cdot 1,05^5 \cdot 1,06^4 \cdot 1,07^3 \quad = \quad 15.791,06$$

b) Wie hoch ist die durchschnittliche Verzinsung?

Lösung:

$$i_{eff} \quad = \quad \sqrt[12]{1,05^5 \cdot 1,06^4 \cdot 1,07^3} - 1 \quad = \quad \sqrt[12]{1,97388} - 1 \quad = \quad 0,058303$$

(ii) Wie oft müssen **zu Beginn** eines jeden Jahres 800,00 € bei einer Bank eingezahlt werden, damit man 5 % Zinseszinsen am Ende des letzten Einzahlungsjahres über ein Kapital von 8.021,25 € verfügen kann?

Lösung: 8 Einzahlungen

$$Ansatz: \quad K_{n\,(vor)} = a \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$8.021,25 \quad = \quad 800,00 \cdot 1,05 \cdot \frac{1,05^n - 1}{0,05} \quad \xrightarrow{Termumformung}$$

$$\frac{8.021,25 \cdot 0,05}{800,00 \cdot 1,05} + 1 \quad = \quad 1,05^n \quad \xrightarrow{\ln} \quad \frac{\ln\left(\frac{8.021,25 \cdot 0,05}{800,00 \cdot 1,05} + 1\right)}{\ln 1,05} \quad = \quad n$$

$$Ergebnis: \quad n \quad = \quad 8$$

(iii) Ferdi Elch hat 15 Jahre lang **am Jahresende** einen gleich großen Betrag auf seinen Sparvertrag eingezahlt.
Bei 6 % Zinseszinsen beläuft sich sein Guthaben jetzt auf 46.551,94 €.
Wie hoch waren die jährlichen Sparleistungen?

Lösung: Jährliche Sparleistung: 2.000,00 €

$$Ansatz: \quad K_{n\,(nach)} = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$46.551,94 \quad = \quad a \cdot \frac{1,06^{15} - 1}{0,06} \quad \xrightarrow{Termumformung}$$

$$\frac{46.551,94 \cdot 0,06}{1,06^{15} - 1} \quad = \quad a \quad \Rightarrow \quad Ergebnis: \quad a \quad = \quad 2.000,00$$