Klausur: Mathematik am Mittwoch, den 28. März 2012

Jürgen Meisel

Zugelassene Hilfsmittel: Nicht grafikfähiger Taschenrechner; Formelsammlung
Bearbeitungszeit: 60 Minuten

1.) **Extrema ohne Nebenbedingungen**

Ermitteln Sie die zwei stationären Stellen der Funktion

$$f(x,y) \quad = \quad 2x^2 - 2y^3 + \frac{1}{2}(x-5y)^2$$

und untersuchen Sie diese Stellen auf ihre Extremwerteigenschaft.

*Anmerkung: Eine Berechnung der Funktionswerte soll **nicht** erfolgen!*

Lösung:

$$I.) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x + (x-5y) = 5x - 5y \overset{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad x = y$$

$$II.) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -6y^2 + (-5)(x-5y) \overset{!}{=} 0 \quad \xrightarrow{x=y} \quad -6y^2 + 20y = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2y(-3y+10) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 0 \quad \wedge \quad y_2 = \frac{10}{3} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = \frac{10}{3}$$

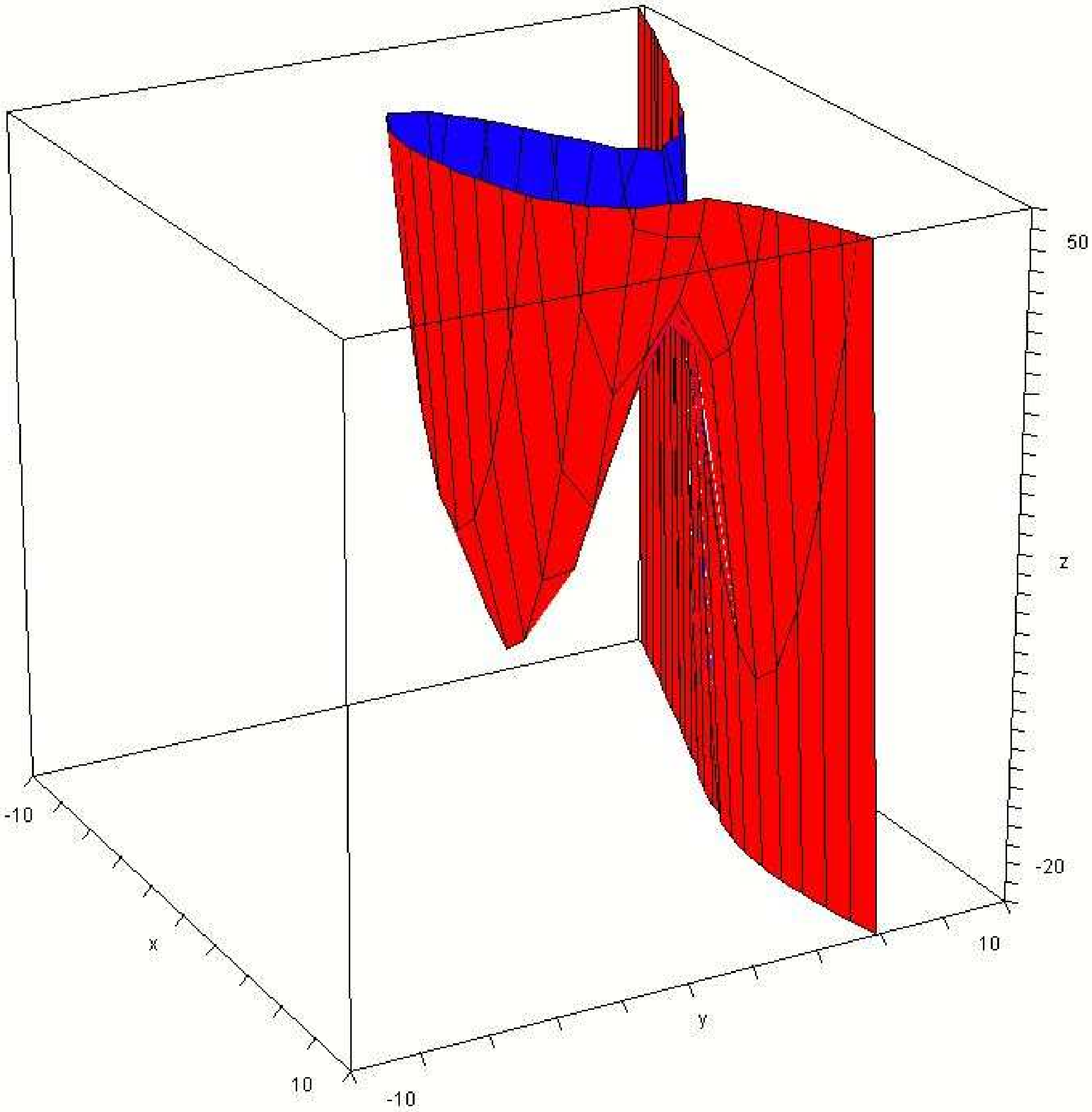
Es resultieren zwei stationäre Stellen: $S_1(0 \mid 0 \mid 0)$ *und* $S_2\left(\frac{10}{3} \,\middle|\, \frac{10}{3} \,\middle|\, \frac{1.000}{27}\right)$

$$Hesse-Matrix: \quad H(f) = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -5 & -12y+25 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad H(f_{S_1}) = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -5 & -12y+25 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad f_{xx} = 5 > 0 \quad \wedge \quad \det(H) = 100 > 0 \quad \Rightarrow \quad Min(0 \mid 0 \mid 0)$$

$$\Rightarrow \quad H(f_{S_2}) = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -5 & -15 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(H) = -100 < 0 \quad \Rightarrow \quad Sattelpunkt$$



50
z
-20
-10
x
10
-10
y
10

2.) **Finanzmathematik**

a) 20.000,00 € werden für fünf Jahre angelegt. Die Bank bietet eine Verzinsung von 5 % p.a. an.
Die Zinsen werden immer nach 3 Monaten kapitalisiert und dann weiter mitverzinst.

(i) Wie hoch ist das Guthaben am Ende der Laufzeit?
(ii) Wie hoch ist der effektive Zinssatz p.a.?

Lösung:

$$K_n \quad = \quad K_0\left(1+\frac{p}{m\cdot 100}\right)^{n\cdot m}$$

$$\rightarrow \quad K_n \quad = \quad 20.000\cdot\left(1+\frac{5}{4\cdot 100}\right)^{20} \quad \rightarrow \quad K_n \quad = \quad 25.640,75$$

Effektivzinssatz:

$$i_{eff} \quad = \quad \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}-1 \quad \rightarrow \quad i_{eff} \quad = \quad \sqrt[5]{\frac{25.640,75}{20.000}}-1 \quad = \quad 0,050945 \quad \approx \quad 5,0945[\%]$$

b) Herr Kauzig legt zu Beginn jeden Jahres 200,00 € wird zu einem Zinssatz von 3 % pro Jahr an.
Nach wie vielen Jahren überschreitet der Betrag zum ersten Mal 3.000,00 €?

Lösung:

$$K_n \quad = \quad a\cdot q\cdot\frac{q^n-1}{q-1} \quad > \quad 3.000$$

$$\rightarrow \quad 200\cdot 1,03\cdot\frac{1,03^n-1}{1,03-1} \quad > \quad 3.000 \quad \rightarrow \quad 1,03^n \quad > \quad 1,4369$$

$$\rightarrow \quad n \quad > \quad 12,26\,[Jahre] \quad \approx \quad 13\,[Jahre]$$

3.) **Matrizen, Determinanten und Lineare Gleichungssysteme**

Gegeben sei:

$$A_t = \begin{pmatrix} t-1 & 2 & 3 \\ t & -1 & 2 \\ 4 & t & 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

a) $(A_t + E)^2$

Lösung:

$$A_t + E = \begin{pmatrix} t & 2 & 3 \\ t & 0 & 2 \\ 4 & t & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{quadriert} \begin{pmatrix} t^2+2t+12 & 5t & 3t+19 \\ t^2+8 & 4t & 3t+10 \\ t^2+4t+20 & 5t+8 & 2t+37 \end{pmatrix}$$

b) $\left(\vec{b}\right)^T \cdot A_t \cdot \vec{b}$

Lösung:

$$\vec{b}^{\,T} \cdot A_t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t-1 & 2 & 3 \\ t & -1 & 2 \\ 4 & t & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t-2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\left(\vec{b}^{\,T} \cdot A_t\right) \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 3t-2 & 3 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 6t-1$$

c) Für welche Werte von **t** hat das LGS eine **<u>eindeutige</u>** Lösung?

$$(A_t + E) \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

Lösung:

$$\begin{vmatrix} t & 2 & 3 \\ t & 0 & 2 \\ 4 & t & 5 \end{vmatrix} = 0+16+3t^2-0-2t^2-10t$$

$$\rightarrow \; t^2-10t+16 = 0 \;\rightarrow\; t_1 = 2 \;\wedge\; t_2 = 8 \;\rightarrow\; t \in \Re \setminus \{2;8\}$$

4.) **Optimum mit Nebenbedingungen**

Gegeben sei die Produktionsfunktion $f(x,y) = 12x\cdot\sqrt{y}$

Die Nebenbedingung sei $x+y \leq 3$

Bestimmen Sie auch den Funktionswert im Optimum.

Lösung:

$$L(x,y,\lambda) = 12x\cdot\sqrt{y}+\lambda(3-x-y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) = 12\cdot\sqrt{y}-\lambda \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda = 12\cdot\sqrt{y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) = 6\frac{x}{\sqrt{y}}-\lambda \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda = 6\frac{x}{\sqrt{y}}$$

$$\textit{Austauschverhältnis}:$$

$$12\cdot\sqrt{y} = 6\frac{x}{\sqrt{y}} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x$$

$$\textit{eingesetzt in NB}:$$

$$3 = x+y \xrightarrow{y\ =\ \frac{1}{2}x} 3 = x+\frac{1}{2}x$$

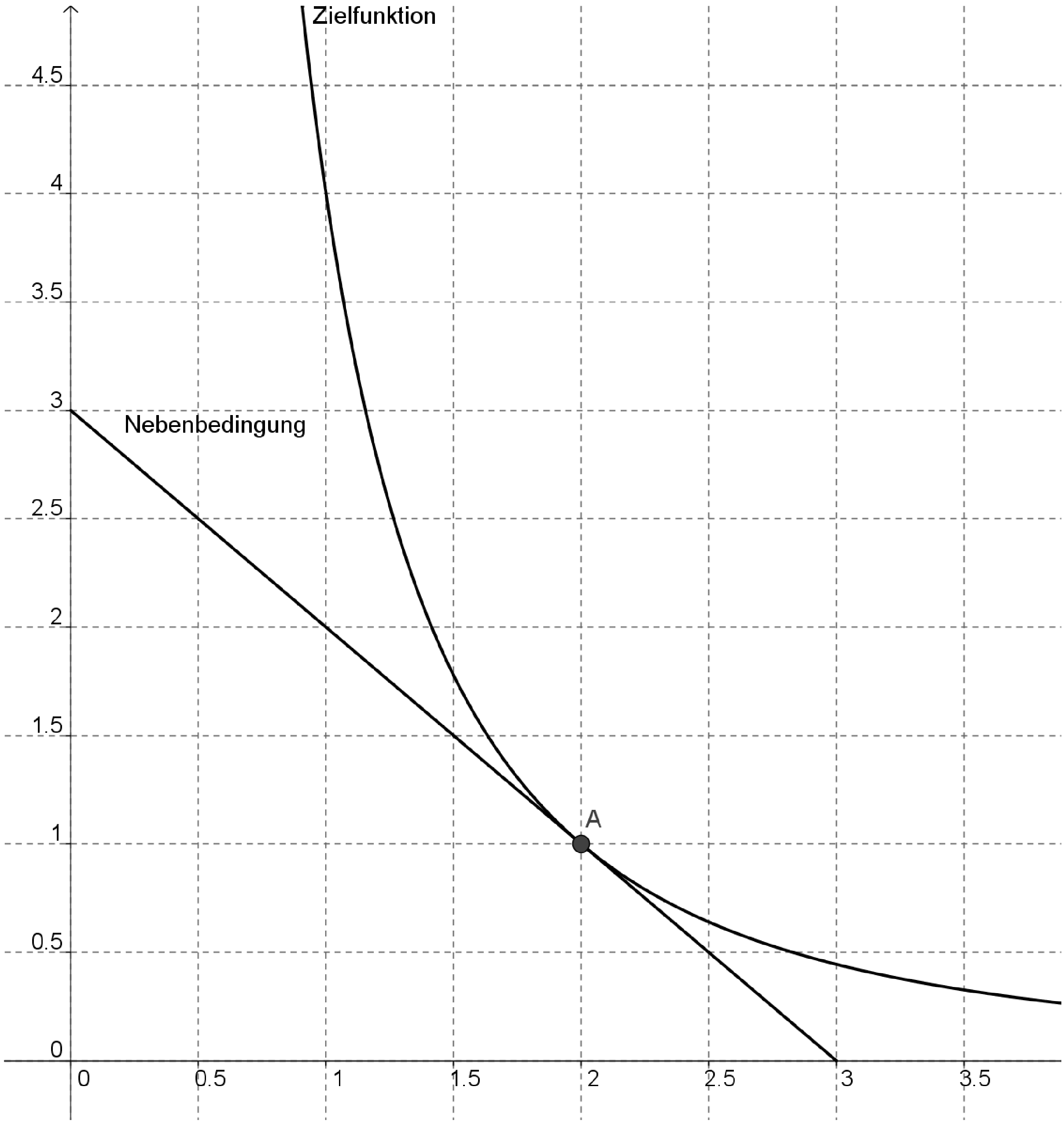
$$\Rightarrow 3 = \frac{3}{2}x \Rightarrow x=2 \Rightarrow y=1$$

$$\Rightarrow f(2\mid 1) = 24$$

Prüfung der erweiterten Hesse-Matrix:

$$\Rightarrow H(L)=\begin{pmatrix} 0 & \frac{6}{\sqrt{y}} & -1 \\ \frac{6}{\sqrt{y}} & -\frac{3x}{y^{1,5}} & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{eingesetzt}{=} \begin{pmatrix} 0 & 6 & -1 \\ 6 & -6 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(H)=18>0 \Rightarrow \textit{Maximum}$$


Zielfunktion
Nebenbedingung
A
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5

5.) **Natürliches Wachstum**

Vor 10 Jahren betrug der Holzbestand eines Waldes 7.000 m^3.
Ohne Schlägerung ist er inzwischen auf 9.880 m^3 angewachsen.
Man darf annehmen, dass das Holzwachstum ein exponentieller Vorgang ist.

a) Berechnen Sie die jährliche Wachstumsrate in %.

Gehen Sie nun von einem exponentiellen natürlichen Wachstum aus:

$$f(t) = f_0 \cdot e^{k \cdot t}$$

Lösung:
$$p = \left(\sqrt[10]{\frac{9.880}{7.000}} - 1\right) \cdot 100 \quad \rightarrow \quad p = 3{,}506 [\%]$$

b) Wie groß ist die Wachstumskonstante k?

Lösung:
$$1{,}03506 = e^k \quad \rightarrow \quad k = \ln 1{,}03506 \approx 0{,}03446$$

c) Man hat vor, in 4 Jahren 8.000 m^3 Holz zu schlägern.
Wann wird dieser Wald den heutigen Holzbestand wieder erreichen?

Lösung: Holzbestand in 4 Jahren:

$$f(4) = 9.880 \cdot e^{0{,}03446 \cdot 4} = 11.340 \xrightarrow{-8.000} f(0) = 3.340$$

$$9.880 = 3.340 \cdot e^{0{,}03446 \cdot t} \quad \rightarrow \quad \ln \frac{9.880}{3.340} = 0{,}03446 \cdot t$$

$$\rightarrow \quad t = \frac{\ln \frac{9.880}{3.340}}{0{,}03446} = 31{,}47 [Jahre] \approx 32 [Jahre]$$

6.) **Ökonomisches Gleichgewicht**

Gegeben seien folgende Angebots- und die Nachfragefunktion:

$$p_A(x) = 0,6x^2 + 11,25 \quad und \quad p_N(x) = 30 - 0,15x^2$$

Berechnen Sie die Konsumenten- und Produzentenrente im Marktgleichgewicht.

Lösung:

Marktgleichgewicht:

$$p_A(x) \quad = \quad p_N(x)$$

$$\rightarrow \quad 0,6x^2 + 11,25 \quad = \quad 30 - 0,15x^2$$

$$\rightarrow \quad 0,75x^2 \quad = \quad 18,75$$

$$\rightarrow \quad x^2 \quad = \quad 25 \quad \rightarrow \quad |x| \quad = \quad 5 \quad \rightarrow \quad p_A(5) \quad = \quad 26,25$$

Konsumentenrente:

$$K_R \quad = \quad \int_0^5 \left(30 - 0,15x^2\right) dx - 5 \cdot 26,25$$

$$K_R \quad = \quad \left[30x - 0,05x^3\right]_0^5 - 131,25$$

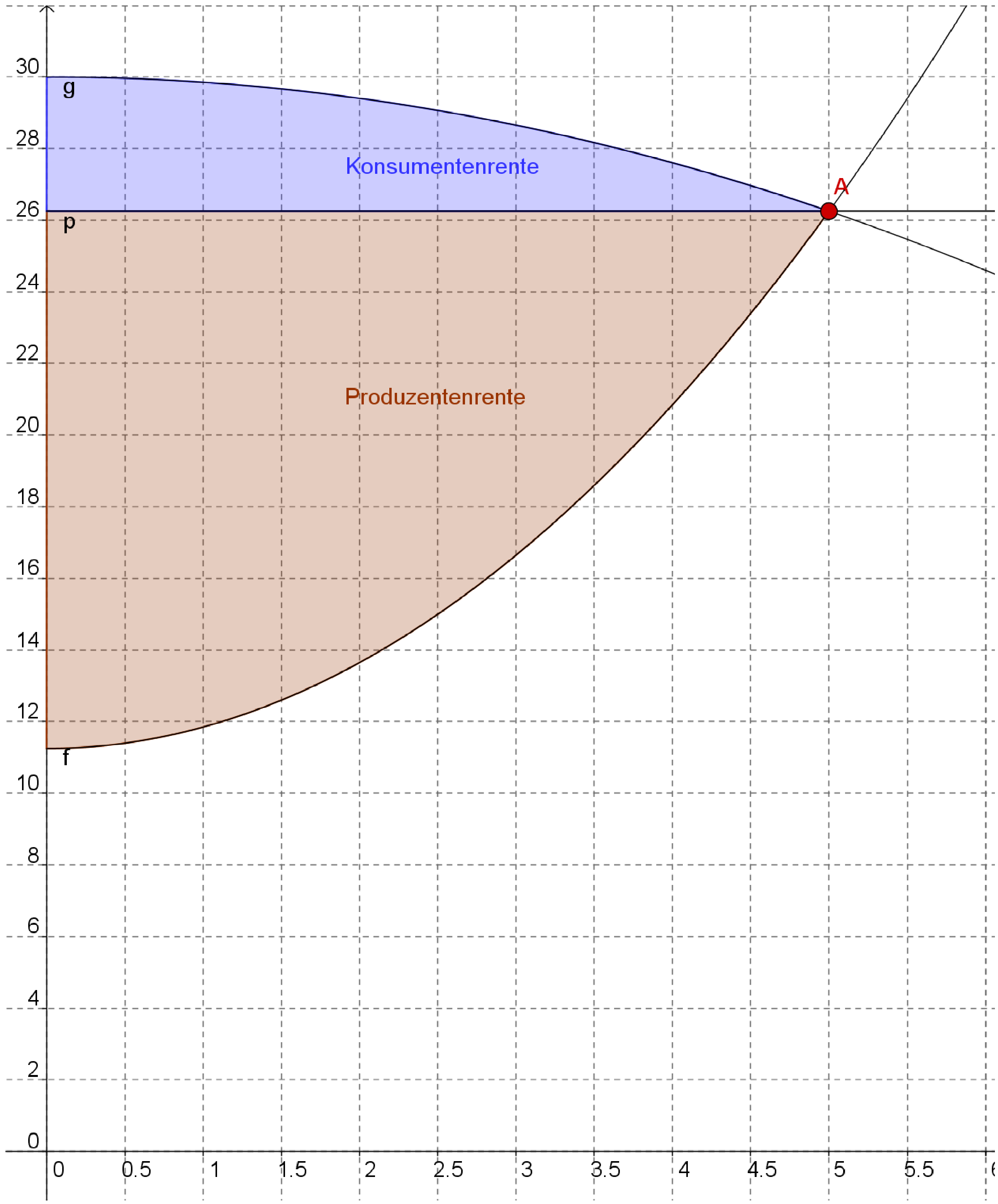
$$K_R \quad = \quad 12,5$$

Produzentenrente:

$$P_R \quad = \quad 5 \cdot 26,25 - \int_0^5 \left(0,6x^2 + 11,25\right) dx$$

$$P_R \quad = \quad 131,25 - \left[0,2x^3 + 11,25x\right]_0^5$$

$$P_R \quad = \quad 50$$



30
28
26
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5
g
p
f
A
Konsumentenrente
Produzentenrente