Klausur: Wirtschaftsmathematik

(Lehrveranstaltung)

Duale Hochschule Baden-Württemberg Mannheim

Fakultät für Wirtschaft

Studiengang: Öffentliche Wirtschaft

Datum: 24.01.2018

Matrikelnummer: ....

Dozent: Jürgen Meisel

Kurs: WOW17A **Semester:** 1

Hilfsmittel: Formelsammlung; Wiss. TR

Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Bewertung: Maximale Punktzahl: 100

Erreichte Punktzahl:

Punkte: ....

Signum: ....

Anmerkungen:

Aufgabennr.:		maximale Punkte	erreichte Punkte	Bemerkungen
1	Teil 1	14		Lineare Optimierung (graphische Lösung)
1	Teil 2	11		Lineare Optimierung (Simplexalgorithmus)
2	a	15		Extrema ohne NB
2	b	15		Extrema ohne NB
3		25		Übergangsmatrizen und statisches Gleichgewicht
4		20		Extrema unter NB (Lagrangeansatz)
Summe		100		

Aufgabe 1: **Lineare Optimierung und Simplexalgorithmus**

Teil 1:

Gemüsebauer Norbert will zukünftig den Tiefkühlkostanbieter Frost & Co beliefern.
Er ist dafür bereit 30 Hektar seines Landes für den Anbau von Erbsen und Möhren zu verwenden.

Ein Hektar Erbsen verursacht 200 € Saatkosten. Für einen Hektar Möhren müssen lediglich 100 € Saatkosten aufgebracht werden. Norbert will zunächst nur 5.000 € investieren.

Der Zeitaufwand für den Anbau von Erbsen wird mit einem Arbeitstag je Hektar veranschlagt; bei den Möhren kalkuliert mit man mit zwei Arbeitstagen je Hektar.
Maximal stehen 50 Arbeitstage zur Verfügung.

Die Verkaufsgewinne belaufen sich auf 400 € je Hektar bei den Erbsen; bei den Möhren liegen sie bei 600 € je Hektar. Norbert möchte gerne eine optimale Anbaukombination haben, bei der der Gewinn optimiert wird.

a) Lösen Sie das Problem graphisch.
b) Welche der **drei Restriktion**en ist im Maximum nicht bindend und wie hoch ist die freie Kapazität der betreffenden Ressource?

Teil 2:

Landwirt Norbert besitzt 210 Hektar Land, das er für Raps, Gerste und Mais in der Aufteilung 2 : 1 : 2 vorgesehen hat.
Die weiteren Daten können Sie der Tabelle entnehmen.

	Raps	Gerste	Mais	Zur Verfügung stehen
Anbaukosten [T€ / ha]	1	2	3	150 T€
Arbeitstage [Tage / ha]	1	2	5	160 Arbeitstage
Gewinn [T€ / ha]	2	5	8	

Bestimmen Sie die gewinnmaximale Anbaukombination mittels **Simplexalgorithmus**.

⇨ **Bitte Anlage verwenden!**

Aufgabe 2: **Extrema ohne Nebenbedingung**

a) Zeigen Sie, dass die Funktion vier stationäre Stellen besitzt und untersuchen Sie deren Eigenschaften.
Im Falle von **Extrema bitte den Funktionswert** bestimmen.

$$f(x,y) = 3x^3 + y^3 - 3y^2 - 36x$$

b) Eine Zwei-Produktunternehmung besitzt im Polypol die Kostenfunktion

$$k(x,y) \quad = \quad 9x^2 + 2y^2 + 6xy + 36 .$$

Mit x und y sind die produzierten und abgesetzten Mengen (in ME) der beiden Produkte bezeichnet. Die Verkaufspreise belaufen sich auf

$$p_x = 60\frac{GE}{ME} \qquad und \qquad p_y = 28\frac{GE}{ME}$$

Bilden Sie die Gewinnfunktion des Unternehmens und ermitteln Sie daraus die gewinnmaximierende Menge.
Zeigen Sie zudem, dass Ihre Lösung ein Maximum darstellt.

Aufgabe 3: Übergangsmatrizen und statisches Gleichgewicht

Bei Wahlen in der Gemeinde Freckenfeld kandidieren nur drei Parteien. Auf Grund langjähriger Untersuchungen können die Wählerströme zwischen den Parteien A, B und C bei zukünftigen Wahlen durch folgende Übergangsmatrix dargestellt werden.

	Von Partei A	Von Partei B	Von Partei C
Zu Partei A	0,8	0,2	0,2
Zu Partei B	0,1	0,7	0,2
Zu Partei C	0,1	0,1	0,6

Es finden alle vier Jahre Wahlen statt.
Die prozentuale Sitzverteilung im derzeitigen Gemeinderat (Wahl: 2017) gestaltet sich wie folgt: **A: 40 %** **B: 20 %** **C: 40 %**

a) Wie lauten voraussichtlich die nächsten beiden Wahlergebnisse 2021 und 2025?
b) Wie war die Sitzverteilung in der Legislaturperiode vor 2017?
c) Bei welchem Ergebnis stellt sich für die drei Parteien ein statisches Gleichgewicht ein?

Aufgabe 4: Extrema mit Nebenbedingung

Gegeben sei die Produktionsfunktion $q(x,y) = 4x^{0,25}y^{0,75}$

Eine Mengeneinheit von Faktor x kostet 10 €, eine Mengeneinheit von Faktor y kostet 18 €. Das Budget beträgt insgesamt 6.400,00 €.

a) Bestimmen Sie das optimale Produktionsergebnis q_{max} mittels der Lagrangemethode.
b) Bestimmen Sie den Wert des Lagrange-Parameters im Produktionsmaximum und erläutern Sie die ökonomische Aussagekraft bezogen auf den Kontext bzw. die Ausgangssituation.

Anlage zu Aufgabe 1 (Teil 2):

	x	y	z	u_1	u_2	u_3	b		
I	2	1	2				210		
II	1	2	3				150		
III	1	2	5				160		
G	2	5	8				0		
I	2	1	2	1	0	0	210		
II	1	2	3	0	1	0	150		
III			1						
G	2	5	8	0	0	0	0		
I			0	1	0	-0,4			
II			0	0	1	-0,6			
III	0,2	0,4	1	0	0	0,2	32		
G									
I									
II	0,5	1	0	0	1,25	-0,75	67,5		
III									
G									
I									
II	0,5	1	0	0	1,25	-0,75			
III									
G									

Lösungen zur Klausur

Aufgabe 1: **Lineare Optimierung und Simplexalgorithmus**

Teil 1:

Gemüsebauer Norbert will zukünftig den Tiefkühlkostanbieter Frost & Co beliefern.
Er ist dafür bereit 30 Hektar seines Landes für den Anbau von Erbsen und Möhren zu verwenden.

Ein Hektar Erbsen verursacht 200 € Saatkosten. Für einen Hektar Möhren müssen lediglich 100 € Saatkosten aufgebracht werden. Norbert will zunächst nur 5.000 € investieren.

Der Zeitaufwand für den Anbau von Erbsen wird mit einem Arbeitstag je Hektar veranschlagt; bei den Möhren kalkuliert mit man mit zwei Arbeitstagen je Hektar.
Maximal stehen 50 Arbeitstage zur Verfügung.

Die Verkaufsgewinne belaufen sich auf 400 € je Hektar bei den Erbsen; bei den Möhren liegen sie bei 600 € je Hektar. Norbert möchte gerne eine optimale Anbaukombination haben, bei der der Gewinn optimiert wird.

a) Lösen Sie das Problem graphisch.
b) Welche der **drei Restriktion**en ist im Maximum nicht bindend und wie hoch ist die freie Kapazität der betreffenden Ressource?

Ansätze:

Nebenbedingungen / Restriktionen:

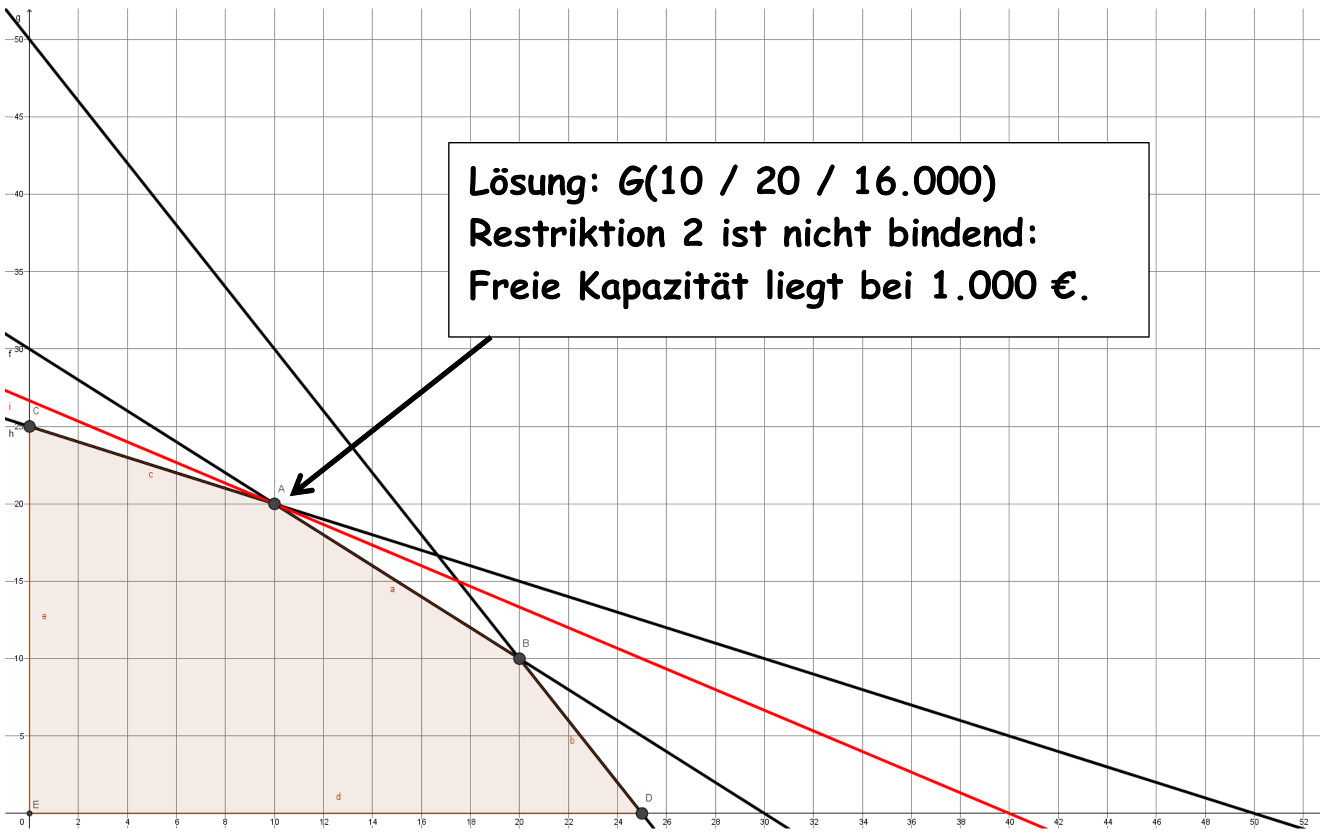
$$I \qquad x + y \leq 30$$

$$II \qquad 200x + 100y \leq 5.000$$

$$III \qquad x + 2y \leq 50$$

Zielfunktion:

$$g(x,y) = 400x + 600y \rightarrow opt.$$



Teil 2:

Landwirt Norbert besitzt 210 Hektar Land, das er für Raps, Gerste und Mais in der Aufteilung 2 : 1 : 2 vorgesehen hat.
Die weiteren Daten können Sie der Tabelle entnehmen.

	Raps	Gerste	Mais	Zur Verfügung stehen
Anbaukosten [T€ / ha]	1	2	3	150 T€
Arbeitstage [Tage / ha]	1	2	5	160 Arbeitstage
Gewinn [T€ / ha]	2	5	8	

Bestimmen Sie die gewinnmaximale Anbaukombination mittels **Simplexalgorithmus**.

⇨ **Bitte Anlage verwenden!**

	x	y	z	u1	u2	u3	b	Nebenrechnung	
I	2	1	2	1	0	0	210	210/2	105
II	1	2	3	0	1	0	150	150/3	50
III	1	2	5	0	0	1	160	160/5	32
G	2	5	8	0	0	0	0		
I	2	1	2	1	0	0	210		I - 2III
II	1	2	3	0	1	0	150		II - 3III
III	0,2	0,4	1	0	0	0,2	32		
G	2	5	8	0	0	0	0		G - 8G
I	1,6	0,2	0	1	0	-0,4	146	146/0,2	730
II	0,4	0,8	0	0	1	-0,6	54	54/0,8	67,5
III	0,2	0,4	1	0	0	0,2	32	32/0,4	80
G	0,4	1,8	0	0	0	-1,6	-256		
I	1,6	0,2	0	1	0	-0,4	146		I- 0,2II
II	0,5	1	0	0	1,25	-0,75	67,5		
III	0,2	0,4	1	0	0	0,2	32		III-0,4II
G	0,4	1,8	0	0	0	-1,6	-256		G - 1,8II
I	1,5	0	0	1	-0,25	-0,25	132,5		
II	0,5	1	0	0	1,25	-0,75	67,5		
III	0	0	1	0	-0,5	0,5	5		
G	-0,5	0	0	0	-2,25	-0,25	-377,5		

Aufgabe 2: **Extrema ohne Nebenbedingung**

a) Zeigen Sie, dass die Funktion vier stationäre Stellen besitzt und untersuchen Sie deren Eigenschaften.
Im Falle von **Extrema bitte den Funktionswert** bestimmen.

$$f(x,y) = 3x^3 + y^3 - 3y^2 - 36x$$

$$I)\quad f_x(x,y) = 9x^2 - 36 = 0 \rightarrow x_1 = 2 \quad und \quad x_2 = -2$$
$$II)\quad f_y(x,y) = 3y^2 - 6y = 0 \rightarrow y_1 = 0 \quad und \quad y_2 = 2$$
$$\xrightarrow{\text{4 stationäre Stellen}} S_1(2 \mid 0 \mid f_1) \wedge S_2(-2 \mid 0 \mid f_2) \wedge S_3(2 \mid 2 \mid f_3) \wedge S_4(-2 \mid 2 \mid f_4)$$

$$Hesse-Matrix: \quad H(f) = \begin{pmatrix} 18x & 0 \\ 0 & 6y-6 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow H_{S_1}(f) = \begin{pmatrix} 36 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} f_{xx} = 36 > 0 \\ \det(H) = -192 < 0 \end{matrix}\right\}$$
$$\rightarrow indefinit: SP$$

$$\rightarrow H_{S_2}(f) = \begin{pmatrix} -36 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} f_{xx} = 36 < 0 \\ \det(H) = 192 > 0 \end{matrix}\right\}$$
$$\rightarrow negativ\ definit: Max(-2 \mid 0 \mid 48)$$

$$\rightarrow H_{S_3}(f) = \begin{pmatrix} 36 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} f_{xx} = 36 > 0 \\ \det(H) = 192 > 0 \end{matrix}\right\}$$
$$\rightarrow positiv\ definit: Min(2 \mid 2 \mid -52)$$

$$\rightarrow H_{S_4}(f) = \begin{pmatrix} -36 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} f_{xx} = 36 < 0 \\ \det(H) = -192 < 0 \end{matrix}\right\}$$
$$\rightarrow indefinit: SP$$

b) Eine Zwei-Produktunternehmung besitzt im Polypol die Kostenfunktion

$$k(x,y) \quad = \quad 9x^2+2y^2+6xy+36 \,.$$

Mit x und y sind die produzierten und abgesetzten Mengen (in ME) der beiden Produkte bezeichnet. Die Verkaufspreise belaufen sich auf

$$p_x = 60\frac{GE}{ME} \qquad und \qquad p_y = 28\frac{GE}{ME}$$

Bilden Sie die Gewinnfunktion des Unternehmens und ermitteln Sie daraus die gewinnmaximierende Menge.
Zeigen Sie zudem, dass Ihre Lösung ein Maximum darstellt.

$$Ansatz\ Gewinnfunktion:$$

$$g(x,y) \quad = \quad 60x+28y-\left(9x^2+2y^2+6xy+36\right)$$

$$g(x,y) \quad = \quad 60x+28y-9x^2-2y^2-6xy-36$$

$$\left.\begin{array}{lllll} I) & g_x(x,y) & = & 60-18x-6y & = & 0 \\ II) & g_y(x,y) & = & 28-4y-6x & = & 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad x=2 \quad und \quad y=4$$

$$\xrightarrow{\text{eine stationäre Stelle}} \quad S(2 \mid 4 \mid g)$$

$$Hesse-Matrix: \quad H(g) \quad = \quad \begin{pmatrix} -18 & -6 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} f_{xx} = -18 < 0 \\ \det(H) = 72-36 = 36 > 0 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \quad negativ\ definit: Max(2 \mid 4 \mid g)$$

Aufgabe 3: **Übergangsmatrizen und statisches Gleichgewicht**

Bei Wahlen in der Gemeinde Freckenfeld kandidieren nur drei Parteien. Auf Grund langjähriger Untersuchungen können die Wählerströme zwischen den Parteien A, B und C bei zukünftigen Wahlen durch folgende Übergangsmatrix dargestellt werden.

	Von Partei A	Von Partei B	Von Partei C
Zu Partei A	0,8	0,2	0,2
Zu Partei B	0,1	0,7	0,2
Zu Partei C	0,1	0,1	0,6

Es finden alle vier Jahre Wahlen statt.
Die prozentuale Sitzverteilung im derzeitigen Gemeinderat (Wahl: 2017) gestaltet sich wie folgt: **A: 40 %** **B: 20 %** **C: 40 %**

a) Wie lauten voraussichtlich die nächsten beiden Wahlergebnisse 2021 und 2025?
b) Wie war die Sitzverteilung in der Legislaturperiode vor 2017?
c) Bei welchem Ergebnis stellt sich für die drei Parteien ein statisches Gleichgewicht ein?

$$U \cdot \overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{p_2} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,2 \\ 0,4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{p_2} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{p_2} = \begin{pmatrix} 0,44 \\ 0,26 \\ 0,3 \end{pmatrix}$$

$$U \cdot \overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{p_3} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,44 \\ 0,26 \\ 0,3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{p_3} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{p_3} = \begin{pmatrix} 0,464 \\ 0,286 \\ 0,25 \end{pmatrix}$$

$$U \cdot \overrightarrow{p_0} = \overrightarrow{p_1} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,2 \\ 0,4 \end{pmatrix} \xrightarrow[LGS]{Lösung} \overrightarrow{p_0} = \begin{pmatrix} 0,333 \\ 0,067 \\ 0,6 \end{pmatrix}$$

$$statisches\ Gleichgewicht:$$

$$(U - E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} -0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & -0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & -0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[LGS]{Lösung} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5k \\ 1,5k \\ k \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\rightarrow\ k=0,2]{2,5k+1,5k+k=1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4: Extrema mit Nebenbedingung

Gegeben sei die Produktionsfunktion $q(x,y) = 4x^{0,25}y^{0,75}$

Eine Mengeneinheit von Faktor x kostet 10 €, eine Mengeneinheit von Faktor y kostet 18 €. Das Budget beträgt insgesamt 6.400,00 €.

a) Bestimmen Sie das optimale Produktionsergebnis q_{max} mittels der Lagrangemethode.
b) Bestimmen Sie den Wert des Lagrange-Parameters im Produktionsmaximum und erläutern Sie die ökonomische Aussagekraft bezogen auf den Kontext bzw. die Ausgangssituation.

<u>Lösung:</u>

$$L(x,y,\lambda) \quad = \quad 4x^{0,25}y^{0,75} + \lambda(6.400 - 10x - 18y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) \quad = \quad \frac{y^{0,75}}{x^{0,75}} - 10\lambda \quad \overset{!}{=} \quad 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \quad = \quad \frac{1}{10}\cdot\frac{y^{0,75}}{x^{0,75}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) \quad = \quad 3\cdot\frac{x^{0,25}}{y^{0,25}} - 18\lambda \quad \overset{!}{=} \quad 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \quad = \quad \frac{1}{6}\cdot\frac{x^{0,25}}{y^{0,25}}$$

$$\textit{Austauschverhältnis}:$$

$$\frac{1}{10}\cdot\frac{y^{0,75}}{x^{0,75}} \quad = \quad \frac{1}{6}\cdot\frac{x^{0,25}}{y^{0,25}} \quad \Rightarrow \quad y \quad = \quad \frac{5}{3}x$$

$$\textit{eingesetzt in NB}:$$

$$6.400 \quad = \quad 10x + 18y \quad \xrightarrow{y \,=\, \frac{5}{3}x} \quad 6.400 \quad = \quad 10x + 18\cdot\frac{5}{3}x$$

$$\Rightarrow \quad 6.400 \quad = \quad 40x \quad \Rightarrow \quad x = 160 \quad \Rightarrow \quad y = 266\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad q\left(160 \;\middle|\; 266\frac{2}{3}\right) \quad = \quad 4\cdot 160^{0,25}\cdot\left(266\frac{2}{3}\right)^{0,75} \quad \approx \quad 938,79$$

$$\textit{Lagrangemultiplikator}:$$

$$\lambda \quad = \quad \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{\frac{800}{3}}{\frac{480}{3}}\right)^{0,75} \quad = \quad \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{0,75} \quad \approx \quad 0,1467$$

Erhöhung des Budgets um 1 GE würde zu einer Erhöhung des Outputs um 0,1467 ME führen.