Klausur Wirtschaftsmathematik

Fakultät für Wirtschaft

Studiengang: Öffentliche Wirtschaft   Datum: 29.01.2021

Matrikelnummer:			**Dozent: Jürgen Meisel**	
Kurs: WOW20A	**Semester:**	1		
Hilfsmittel: Wiss. TR & Formelsammlung			**Bearbeitungszeit: 60 min.**	
Bewertung:	Maximale Punktzahl: 60		Erreichte Punktzahl:	
Prozente:	....		Signum:	
Anmerkungen:	***Bitte bearbeiten Sie nur 5 der 6 Aufgabenstellungen.*** ***<u>Bitte beachten:</u>*** ***Falls Sie bei allen Aufgaben eine Bearbeitung bzw. Teilbearbeitung durchgeführt haben, müssen Sie eine Aufgabe für die Bewertung streichen.*** ***Sollte die Annullierung einer Aufgabe von Ihrer Seite nicht erfolgen, dann kommen die Aufgaben 1 bis 5 in die Wertung!***			

Nr	Thema der Aufgabe	max. Punkte	erreichte Punkte	Bemerkungen
1	Übergangsmatrizen und stat. Gleichgewicht	12		
2	Ökonomische Anwendung zur Diff.-Rg. (1 Variable)	12		
3	Diff.-Rg I (mehrere Var.): Extrema ohne NB	12		
4	Diff.-Rg II (mehrere Var.): Extrema mit NB	12		
5	Rechentechnik zu Matrizen	12		
6	Lineare Optimierung & Simplexalgorithmus	12		
Summe		60		

(1) Matrizen und Vektoren: Übergangsmatrizen & Statisches Gleichgewicht

In Schneckenburg an der Lahm gibt es drei Lieferservice-Unternehmen - (A)llesGutUndBillig, (B)esterPreis und (C)heapAndWell – die den Markt unter sich aufgeteilt haben.
Insgesamt gibt es monatlich 12.000 Bestellungen bei den drei Anbietern.
Allerdings gibt es natürlich Veränderungen der Bestell-Verteilung auf die Anbieter von einem zum nächsten Monat, die lückenhaft in der nachfolgenden Übergangsmatrix dargestellt sind:

$$U[A,B,C]=\begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & c \\ 0,3 & 2b & c \\ a & 4b & 0,6 \end{pmatrix}$$

Im November 2020 konnte man folgendes Verteilungsverhältnis feststellen: A : B : C entspricht 5 : 4 : 1

a) Vervollständigen Sie die Übergangsmatrix U[A, B, C] und erstellen Sie den Verteilungsvektor für November 2020.

Verwenden Sie nun für die kommenden Aufgaben folgende Angaben:

$$U[A,B,C]=\begin{pmatrix} 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,7 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \quad und \quad \overrightarrow{p_{November}}=\begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Geben Sie eine Erläuterung für den Wert 0 im Verteilungsvektor.

c) Welche Anteile sind im Dezember 2020 zu erwarten?

d) Zeigen Sie, dass mit den Angaben die Anteile im Oktober 2020 leider nicht ermittelt werden können.

e) Der Anbieter (C)eapAndWell kann langfristig nur am Markt rentabel existieren, wenn monatlich mind. 2.500 Bestellungen eingehen.
Untersuchen Sie, ob dies bei gleichbleibendem Wechselverhalten zu erwarten ist.

Lösung:

a) Mit Spaltensumme = 1 gilt:

$$U[A,B,C]=\begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & c \\ 0,3 & 2b & c \\ a & 4b & 0,6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & \begin{matrix} c=1-c-0,6 \\ \rightarrow c=0,2 \end{matrix} \\ 0,3 & \begin{matrix} 2b=1-4b-0,1 \\ \rightarrow 2b=0,3 \end{matrix} & \rightarrow c=0,2 \\ 0,3=1-0,7 & \rightarrow 4b \rightarrow 0,6 & 0,6 \end{pmatrix}$$

b) Der Anbieter war zu diesem Zeitpunkt nicht am Markt akiv.

c) $U[A,B,C]\cdot\overrightarrow{p_{November}}=\overrightarrow{p_{Dezember}} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{p_{Dezember}} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,7 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,28 \\ 0,27 \end{pmatrix}$

$$U[A,B,C]\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\overline{p_{November}} \xrightarrow{\text{Lösung LGS}} \begin{pmatrix}a & b & c\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}1,2 & \frac{1}{3} & -\frac{8}{15}\end{pmatrix}^T$$

d) $\quad Widerspruch\,1:\quad a>1 \qquad Widerspruch\,2:\quad c<0$

e)

$$Ansatz:\ U\cdot\vec{x} = \vec{x} \rightarrow (U-E)\cdot\vec{x} = \vec{0}$$

$$\xrightarrow{LGS} \begin{pmatrix}-0.4 & 0.1 & 0.1\\ 0.1 & -0.3 & 0.1\\ 0.3 & 0.2 & -0.2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{\lambda}{11}\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\11\end{pmatrix} mit\ \lambda\in\Re$$

$$\xrightarrow{x+y+z=1} \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{1}{20}\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\11\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,20\\0,25\\0,55\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\ 0,55\cdot 12.000 = 6.600 > 2.500\ \ [Bedingung\ erfüllt]$$

Direkte Lösung für statische Verteilung:

$$\begin{pmatrix}-0,4 & 0,1 & 0,1\\ 0,1 & -0,3 & 0,1\\ 0,3 & 0,2 & -0,2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{1}{20}\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\11\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,20\\0,25\\0,55\end{pmatrix}$$

(2) Ökonomische Anwendung zur Differentialrechnung mit einer Variablen

Ein-Produkt-Unternehmer Kuno Storchenfuß – Monopolist – agiert mit der Umsatz-Funktion $u(x)=-4x^2+100x$.

Die Kostenfunktion beläuft sich nach eingehenden Analysen auf $K(x)=\frac{1}{2}x^3-5x^2+20x+100$

Die hergestellte Menge x wird auch komplett zum jeweiligen Preis p(x) abgesetzt.

a) Bestimmen Sie die Preis-Absatz-Funktion p(x) und das Umsatz-/Erlösmaximum. Welchen Preis kann Kuno Storchenfuß hier zugrunde legen?
b) Ermitteln Sie nun die Gewinnfunktion und berechnen Sie Gewinnschwelle und Gewinngrenze des Unternehmens.
c) Wo liegt das Gewinnmaximum? Wie hoch ist es?
d) Berechnen Sie nun noch den Cournot-Punkt.

Lösung:

a)

$$u(x)=p(x)\cdot x \quad\rightarrow\quad u(x)=-4x^2+100x=(-4x+100)x$$

$$\rightarrow\quad p(x)=-4x+100$$

$$u'(x)=-8x+100=0 \quad\rightarrow\quad x=12,5$$

$$u''(x)=-8<0 \quad\rightarrow\quad Max(12,5 \quad 625)\quad mit\ p(12,5)=50$$

b)

$$g(x) = u(x) - K(x) \quad \rightarrow \quad g(x) = -4x^2 + 100x - \left(\frac{1}{2}x^3 - 5x^2 + 20x + 100\right) = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 + 80x - 100$$

$$g(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 + 80x - 100 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 1{,}24\,[Gewinnschwelle] \quad und \quad x_2 = 13{,}07\,[Gewinngrenze]$$

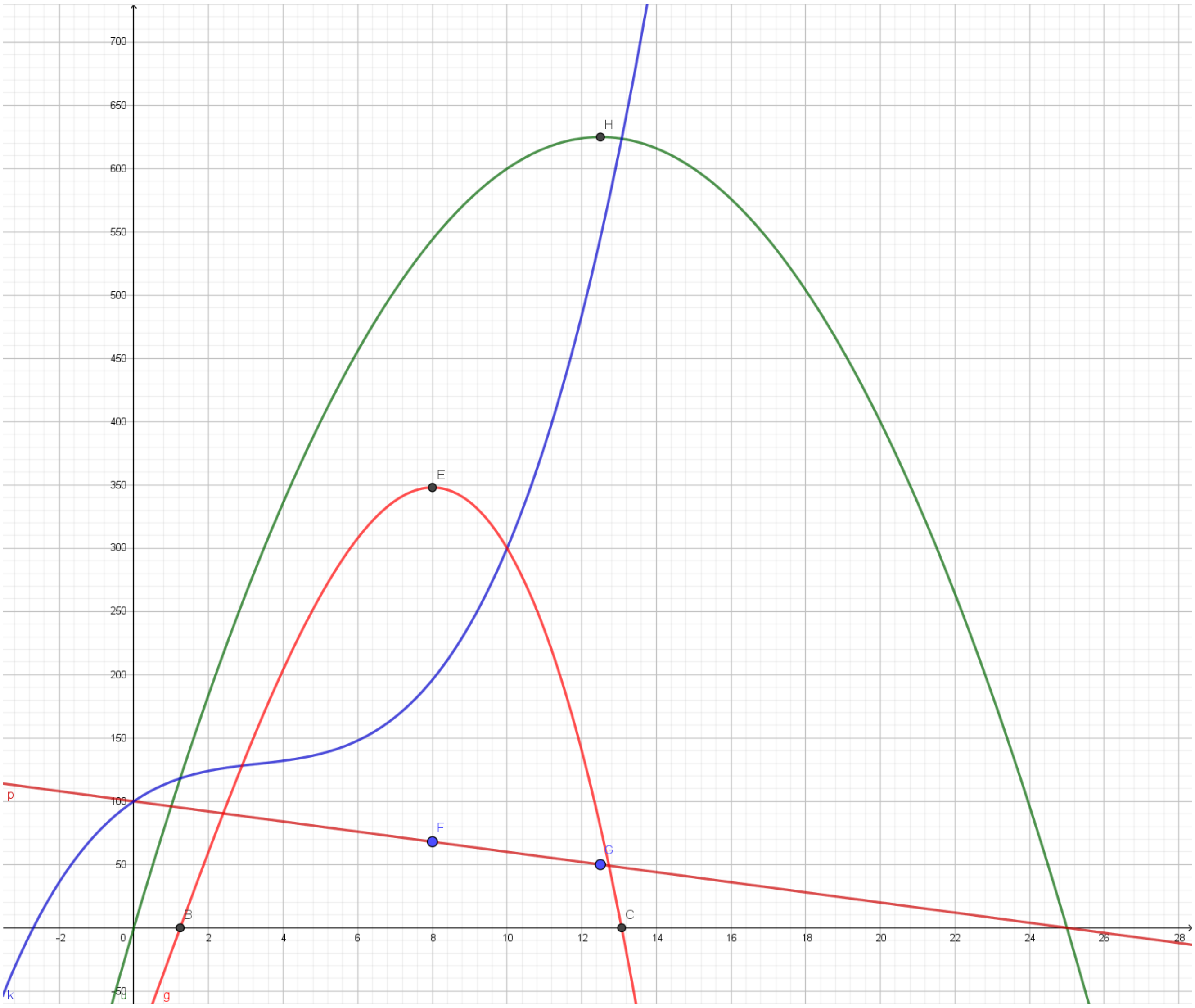
c) + d)

$$g(x) = u(x) - K(x) \quad \rightarrow \quad g(x) = -4x^2 + 100x - \left(\frac{1}{2}x^3 - 5x^2 + 20x + 100\right) = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 + 80x - 100$$

$$g'(x) = -1{,}5x^2 + 2x + 80 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 8 \quad und \quad x_2 = -6{,}67 < 0\,[n.def.]$$

$$g''(x) = -3x + 2 < 0 \xrightarrow{x=8} g''(8) = -22 < 0 \xrightarrow{x=8} Max(8 \quad 348)$$

$$mit\ p(8) = 68 \xrightarrow{Cournot-Punkt} C(8 \quad 68)$$



(3) Differentialrechnung I: Extrema ohne Nebenbedingung(en)

Ermitteln Sie die **<u>beiden</u>** stationären Stellen der Funktion

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^3 - 6x^2 + \frac{1}{4}y^2 - \frac{5}{2}y$$

und untersuchen Sie **<u>diese</u>** auf ihre Extremwerteigenschaft.
Berechnen Sie den Funktionswert nur ***bei <u>der</u> Extremwertstelle*** 😉

Lösung:

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^3 - 6x^2 + \frac{1}{4}y^2 - \frac{5}{2}y$$

$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{3}{2}x^2 - 12x = 0 \rightarrow \left(\frac{3}{2}x - 12\right)x = 0 \rightarrow x_1 = 0 \quad und \quad x_2 = 8 \\ f_y(x,y) &= \frac{1}{2}y - \frac{5}{2} = 0 \rightarrow x = 5 \end{aligned}\right\} \begin{matrix} S_1(0 \mid 5 \mid f_1) \\ S_2(8 \mid 5 \mid f_2) \end{matrix}$$

$$Hesse-Matrix: \quad H(f) = \begin{pmatrix} 3x-12 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$Auswertung \ \ für \ S_1(0 \mid 5 \mid f_1):$$

$$H_{S_1}(f) = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} f_{xx} = -12 < 0 \\ \det(H) = -6 < 0 \end{matrix}\right\} indefinit \rightarrow SP$$

$$Auswertung \ \ für \ S_2(8 \mid 5 \mid f_2):$$

$$H_{S_2}(f) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} f_{xx} = 12 > 0 \\ \det(H) = 6 > 0 \end{matrix}\right\} positiv\ definit \rightarrow Min(8 \mid 5 \mid -134{,}25)$$

(4) Differentialrechnung II: Extrema mit Nebenbedingungen

Gegeben sei folgende Produktionsfunktion: $f(x,y) = 3x^{0,4} \cdot y^{0,6}$

Eine Mengeneinheit für x kostet 6,00 €, der Preis für eine Mengeneinheit von y liegt bei 12,00 €.

Insgesamt steht ein Budget von b = 30.000 GE zur Verfügung.

a) Bestimmen Sie das optimale Produktionsprogramm mit Hilfe des Lagrangeansatzes.

b) Welchen Wert besitzt der Lagrangeparameter im Maximumfall und welche ökonomische Aussage kann hier getroffen werden, wenn sich das Budget b um 100 GE erhöht?

Lösung:

$$f(x,y) = 3x^{0,4} \cdot y^{0,6}$$

$$L(x,y,\lambda) \quad = \quad 3x^{0,4} \cdot y^{0,6} + \lambda \cdot (30.000 - 6x - 12y)$$

$$L_x(x,y,\lambda) \quad = \quad 1{,}2 \cdot \frac{y^{0,6}}{x^{0,6}} - 6\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{1{,}2}{6} \cdot \frac{y^{0,6}}{x^{0,6}} = 0{,}2 \cdot \frac{y^{0,6}}{x^{0,6}}$$

$$L_y(x,y,\lambda) \quad = \quad 1{,}8 \cdot \frac{x^{0,4}}{y^{0,4}} - 12\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{1{,}8}{12} \cdot \frac{x^{0,4}}{y^{0,4}} = 0{,}15 \cdot \frac{x^{0,4}}{y^{0,4}}$$

$$0{,}2 \cdot \frac{y^{0,6}}{x^{0,6}} = 0{,}15 \cdot \frac{x^{0,4}}{y^{0,4}} \quad \rightarrow \quad y \quad = \quad 0{,}75x$$

$$L_\lambda(x,y,\lambda) \quad = \quad 30.000 - 6x - 12y = 0 \quad \rightarrow \quad 30.000 = 6x + 12y$$

$$\xrightarrow{y \;=\; \frac{4}{3}x} \quad 30.000 = 6x + 12 \cdot \frac{3}{4}x \quad \rightarrow \quad 30.000 = 15x \quad \rightarrow \quad x = 2.000 \quad \xrightarrow{y \;=\; 0{,}75x} \quad y = 1.500$$

$$f(2.000/1.500) \quad = \quad 3 \cdot 2.000^{0,4} \cdot 1.500^{0,6} \quad \approx \quad 5.048{,}80 \quad oder$$

$$f\left(2.000 / \frac{3}{4} \cdot 2.000\right) \quad = \quad 3 \cdot 2.000^{0,4} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot 2.000\right)^{0,6} \quad = \quad 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{0,6} \cdot 2.000 \quad \approx \quad 5.048{,}80$$

Wert für λ

$$\lambda = 0{,}2 \cdot 0{,}75^{0,6} = 0{,}168293$$

Erhöhung Budget um 100 GE: 30.100 [Budget (neu)]

$\rightarrow \quad 100 \cdot 0{,}168293 \quad = \quad 16{,}8293 \quad \approx \quad 16{,}83$

$\rightarrow$ Erhöhung des Produktionsergebnisses auf 5.065,63

Nachweis:

$$30.100 = 15x \quad \rightarrow \quad 2.006{,}67 = x \quad \xrightarrow{y \;=\; 0{,}75x} \quad y = 1.505$$

$$f(2.006{,}67/1.505) \quad = \quad 3 \cdot 904{,}545^{0,4} \cdot 1.505^{0,6} \quad \approx \quad 5.065{,}63 \quad oder$$

$$f(2.006{,}67 / 0{,}75 \cdot 2.006{,}67) \quad = \quad 3 \cdot 2.006{,}67^{0,4} \cdot (0{,}75 \cdot 2.006{,}67)^{0,6}$$

$$f(2.006{,}67 / 0{,}75 \cdot 2.006{,}67) \quad = \quad 3 \cdot 0{,}75^{0,6} \cdot 2.006{,}67 \quad \approx \quad 5.065{,}63$$

$$Unterschied: \quad 5.065{,}63 - 5.048{,}80 \quad = \quad 16{,}83$$

(5) Rechentechnik zu Matrizen

Bestimmen Sie das Ergebnis des Ausdrucks $Det\left(3A+2F\right)+Det\left(C\cdot D^T\right)$ mit

$$A=\begin{pmatrix} x & 2 & 1 \\ 0 & 1 & x \\ -1 & 2x & 2 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3x \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ x & 0 \\ 0 & -x \end{pmatrix} \quad F=\begin{pmatrix} -x & -4 & 3 \\ 0 & -1 & -3x \\ 5 & 4x & 8 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$Det\left(3A+2F\right)+Det\left(C\cdot D^T\right) \quad = \quad 42x^3+64x-63+0 \quad = \quad 42x^3+64x-63$$

$NR:$

$$\begin{pmatrix} 3x & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 3x \\ -3 & 6x & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2x & -8 & 6 \\ 0 & -2 & -6x \\ 10 & 8x & 16 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & -2 & 9 \\ 0 & 1 & -3x \\ 7 & 14x & 22 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[Sarrus]{\det} \quad 22x+42x+0-63-\left(-42x^3\right)-0=42x^3+64x-63$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3x \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ -1 & 0 & -x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 0 & 2x & 0 \\ -3x & 0 & -3x^2 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{\det} \quad -6x^3-0-0+6x^3-0-0=0$$

(6) Lineare Optimierung und Simplexalgorithmus

$$\begin{array}{llll} (1) & 5x+5y & \le & 75 \\ (2) & 2x+4y & \le & 50 \\ (3) & 5x+2y & \le & 60 \\ \hline ZF & f\left(x,y\right) & = & 10x+14y \quad \to \quad \max. \end{array}$$

Erstellen Sie die **graphische *und* die analytische** Lösung –
Sie können hierfür gerne die Anlagen 1 und/oder 2 verwenden 😉

Lösung:

Simplex-Algorithmus:

$$\begin{array}{llll} (1) & 5x+5y & \leq & 75 \\ (2) & 2x+4y & \leq & 50 \\ (3) & 5x+2y & \leq & 60 \\ \hline ZF & f(x,y) & = & 10x+14y \;\rightarrow\; \max. \end{array}$$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	
i	5	5	1	0	0	75	$75/5=15$
ii	2	4	0	1	0	50	$50/4=12,5 \rightarrow ii/4$
iii	5	2	0	0	1	60	$60/2=30$
ZF	10	14	0	0	0	Z	

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	
i	5	5	1	0	0	75	$i-5ii$
ii	0,5	1	0	0,25	0	12,5	
iii	5	2	0	0	1	60	$iii-2ii$
ZF	10	14	0	0	0	Z	$ZF-14ii$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	
i	2,5	0	1	−1,25	0	12,5	$12,5/2,5=5 \rightarrow i/\frac{5}{2}$
ii	0,5	1	0	0,25	0	12,5	$12,5/0,5=25$
iii	4	0	0	−0,5	1	35	$35/4=8,75$
ZF	3	0	0	−3,5	0	$Z-175$	

	x	y	u_1	u_2	u_3	b	
i	1	0	0,4	−0,5	0	5	
ii	0,5	1	0	0,25	0	12,5	$ii-0,5i$
iii	4	0	0	−0,5	1	35	$iii-4i$
ZF	3	0	0	−3,5	0	$Z-175$	$ZF-3i$

	x	y	u_1	u_2	u_3	b
i	1	0	0,4	−0,5	0	5
ii	0	1	−0,2	0,5	0	10
iii	0	0	−1,6	1,5	1	15
ZF	0	0	−1,2	−2	0	$Z-190$

$$\text{Lösung}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} \quad mit\;\; f_{\max}(5,10)=190$$